Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 5: Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. Calculer les développements limités à l'ordre 3 en $(0,0)$ de :

1. $f:(x,y)\mapsto ye^x$.
2. $f:(x,y)\mapsto \sin(xy)+\cos(xy)$.

Exercice 2. Etudier sur $\mathbb{R}^2$ les extréma locaux et globaux des fonctions définies par :

1. $f(x,y)=x^4-y^4$.
2. $g(x,y)=x^3+y^3-3xy$.
3. $h(x,y)=x^4+y^4-4xy$.
4. $k(x,y)=x^2+y^2+xy+2x-2y$.

Exercice 3. (Contre-exemple pour le théorème de Schwarz)
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\ y^2\sin(x/y)\text{ si } y\neq 0;\quad 0\text{ sinon.}$$

1. f est-elle continue ? différentiable ?
2. Caculer les dérivées premières et secondes de f là où elles existent.
3. Pourquoi a-t-on exhibé un contre-exemple au théorème de Schwarz ?

Exercice 4. Rechercher les points critiques de $y(x^2+\ln^2 y)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur nature. Même question sur $\mathbb{R}^3$ pour $z(e^x-1)-y^2$.

Exercice 5. Trouver les extrema de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+2y^2$ dans le disque $x^2+y^2\leq 1$.

Exercice 6. Déterminer et classer les points critiques (en spécifiant si c'est des point de min ou de max local ou global, ou des points selle) de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$.