

---

Feuille d'exercices n° 8: Déterminations holomorphes, intégrales complexes

---

**Exercice 1** (Racine  $p$ -ième). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $p \geq 2$  un entier. On appelle détermination holomorphe de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$  toute fonction holomorphe  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $z \in U$ ,  $(f(z))^p = z$ .

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe du log sur  $U$  alors il existe une détermination de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$ .
2. Soit  $f$  une détermination holomorphe de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$ . Montrer que pour tout  $z \in U$ ,  $f(z) \neq 0$ . En déduire que  $0 \notin U$ .
3. On suppose  $U$  connexe et on considère deux déterminations holomorphes  $f_1$  et  $f_2$  de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $f_1 = \lambda f_2$ .
4. En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de  $z \mapsto z^{1/p}$  sur  $U$  alors il en existe exactement  $p$  distinctes. Quelles sont-elles ?
5. Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe  $f$  de  $z \mapsto z^{1/3}$  sur  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  telle que  $f(1) = e^{4i\pi/3}$ . Calculer  $f(i)$  et déterminer  $f(U)$ .
6. Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe  $g$  de  $z \mapsto z^{1/2}$  sur  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$  telle que  $g(-1) = i$ . Déterminer  $g(U)$ .

**Exercice 2** (Racine carrée d'une fonction holomorphe). Soit  $U$  le plan complexe privé des deux demi-droites  $[1, +\infty[$  et  $] -\infty, -1]$  de l'axe réel.

1. Soit  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 1$ . Montrer que  $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ .
2. On note  $\log$  la détermination du logarithme définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ . Montrer que la fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$  est bien définie et holomorphe sur  $U$ . Calculer son carré et sa dérivée.
3. Notons  $V$  le plan complexe privé du segment réel  $[-1, 1]$ . Vérifier que pour  $z \in V$ , on a  $z^{-1} \in U$ . On définit alors  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  par  $g(z) = izf(z^{-1})$ . Montrer que  $g$  est bien définie et holomorphe sur  $V$ . Calculer son carré et sa dérivée.

**Exercice 3.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On appelle détermination holomorphe sur  $U$  de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$  telle que  $\sin(f(z)) = z$  pour tout  $z \in U$ .

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur  $U$  de arcsinus alors  $-1 \notin U$  et  $1 \notin U$ .
2. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  ne contenant ni 1 ni  $-1$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
  - (a)  $f$  est une détermination holomorphe sur  $U$  de arcsinus.
  - (b) Il existe  $g$  holomorphe sur  $U$  telle que  $g(z)^2 = 1 - z^2$  et  $e^{if(z)} = iz + g(z)$  pour tout  $z \in U$ .
3. Montrer que dans ce cas,  $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$  pour tout  $z \in U$ .
4. Soit  $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ . Montrer qu'il existe une unique détermination  $f$  de arcsinus sur  $U$  telle que  $f(0) = 0$ .

**Exercice 4** (\*). Trouver l'erreur dans :  $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ .

**Exercice 5** (★). Pour  $z \in \mathbb{C}^*$ , déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z^z$ .

---

**Exercice 6** (★). Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 1$ . Soit  $I_k = \int_{\gamma_k} f(z)dz$  où  $\gamma_1(t) = t + it^2$  avec  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma_2(t) = e^{t+it}$  avec  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\gamma_3(t) = \cos(t) + i \sin(2t)$  avec  $t \in [0, 2\pi]$ .  
Montrer que  $I_1 = -5/3 - i/3$ ,  $I_2 = e^{6\pi}/3 - e^{2\pi} + 2/3$ ,  $I_3 = 0$ .

**Exercice 7** (★). Montrer que  $\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz = \frac{\ln(5)}{2} + i(\arctan(3) - \frac{\pi}{4})$ .

**Exercice 8** (★). Pour  $r > 0$ , soit  $\gamma_r : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ . Calculer  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2} dz$ .

**Exercice 9** (★). Soit  $C$  le cercle unité parcouru dans le sens direct.

Calculer  $\int_C (z + \frac{1}{z})^{2n} \frac{1}{z} dz$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On pensera à utiliser la formule du binôme pour développer

$(z + \frac{1}{z})^{2n}$ . En déduire les valeurs de  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(t) dt$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n}(t) dt$ .

Déterminer également les valeurs de  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1}(t) dt$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1}(t) dt$ .