Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 8: Courbes paramétrées

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que le graphe de f est une courbe paramétrée $\gamma(x) = (x, f(x))$ régulière partout.
2. Montrer que la courbure au point d'abscisse x est $\dfrac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$.

Exercice 2. La *spirale logarithmique* est la courbe paramétrée par $M(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner la spirale et montrer qu'elle est régulière partout.
2. Si on désigne par $v(t)$ le vecteur vitesse au point $M(t)$, montrer que l'angle entre $\overrightarrow{OM(t)}$ et $v(t)$ est constant ; le déterminer.
3. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, et le déterminer, tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la longueur de la courbe pour $t \in]-\infty, t_0]$ est égale à $\lambda \cdot \|\overrightarrow{OM(t_0)}\|$.
4. Trouver un paramètre par longueur d'arc $s(t)$ et reparamétrer la spirale par longueur d'arc.
5. Déterminer la courbure en un point quelconque.

Exercice 3. Montrer que la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1,\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1$ possède un unique point double. Déterminer une équation des tangentes en ce point.

Exercice 4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients A, B pour que la courbe donnée par :

$$t \mapsto (\cos(t), \cos(t) + At, \cos(t) + Bt^2)$$

soit contenue dans un plan.