Polytech' Paris-Sud
Orsay

2011–2012
PeiP1-S1-Math

Test de Mathématiques
questions pour le contrôle en TD
Novembre 2011

Attention, ce document comporte 2 pages (et 20 questions).
Pour chaque assertion, dire si elle est vraie ou fausse, avec justification.

1. La fonction $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ pour $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ pour $x < 1$ admet une primitive F donnée par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. Si $f \in C^0(\mathbb{R})$ et $F \in C^1(\mathbb{R})$ sont deux fonctions telles que $F'(x) = xf(x)$ et $F(0) = 0$ alors les primitive de f sont de la forme $\frac{F(x)}{x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan x$ est uniformément continue.
4. Si $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ est une fonction intégrable telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
5. Si f est une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t)dt$$
est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue on obtient l'égalité :
$$\int_{-1/2}^{1/2} f(t)dt = \int_{-5\pi/6}^{\pi/6} f(\sin x)\cos x dx\,.$$
7. On a l'égalité suivante :
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{44\sqrt{2}-8}{105}\,.$$
8. On a l'égalité suivante :
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$
9. Soit $a < b$ deux réels et $n \geqslant 1$ un entier. On définit $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Alors $\int_a^b f^{(k)}(x)dx \neq 0$ si et seulement si $k \in \{n, n+1, \ldots, 2n+1\}$.
10. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ n'est pas de classe C^2 mais admet un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$.

11. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{e^x}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 5 dont le coefficient du terme en x^5 est $13/30$. On admettra que $e \notin \mathbb{Q}$.
12. On a le $\mathrm{DL}_2(0)$ suivant :

$$\left(\frac{e^{-x} + e^x}{2}\right)^{1/x} = 1 + x + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\,.$$

13. On a la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1 + \sin x)}{x^4} = \frac{1}{12}\,.$$

14. On a la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{1/x} - (1+x)^{1/x}\right) = 0\,.$$

15. On a la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{e^x} - e^{1+x}}{\sqrt{1+x} - \cos x} = \frac{1}{2}\,.$$

16. On a la limite suivante :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,.$$

17. On a la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin(x)) \tan\left(\frac{2x}{x^2+5}\right) = 2\,.$$

18. La fonction $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ admet un prolongement de classe C^1 au voisinage de 0. Ce prolongement est localement au-dessus de sa tangente en 0.
19. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos(|x|^{1/2}) + \lambda \sin|x|$$

admet un minimum local en 0 si et seulement si $\lambda > 1/2$.
20. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$$

peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.