CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 1 : Théorie de la mesure

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$ et $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ si $\mu(A) < +\infty$.

2. Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

3. Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad (\sigma - \text{sous-additivité})$$

Exercice 2. Montrer que si une mesure finie μ sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ est invariante par translation, alors elle est nulle.

Exercice 3. On définit $\mathcal{T}$ comme la tribu engendrée par les parties finies de $\mathbb{R}$.

1. Donner une description explicite de $\mathcal{T}$.

2. Comparer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Tribu complétée, mesure complétée. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ est dite μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que

$$N \subset A \quad \text{et} \quad \mu(A) = 0.$$

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeable de Ω et $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$.

1. Montrer que toute union dénombrable de négligeables est négligeable.

2. Montrer que

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\, A \cup N \mid \ A \in \mathcal{F},\ N \in \mathcal{N} \}\,.$$

3. Montrer que la mesure μ s'étend de manière unique sur $\overline{\mathcal{F}}$.

Exercice 5. Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles de la formes $]-\infty, x]$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}\big)$$

Exercice 6. On note $\mathcal{X} := \{\{0,1\}, [0,1]\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{X})$ la tribu engendrée par $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe une unique mesure μ sur $\mathcal{F}$ telle que

$$\mu(\{0,1\}) = 0, \quad \mu([0,1]) = 1, \quad \mu(\mathbb{R}) = +\infty.$$

3. Quel sont les éléments de $\mathcal{F}$ de mesure nulle ?

4. Calculer la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ pour la mesure μ.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Soient A, B deux sous-ensembles stricts de Ω et non vides. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\})$ soit une tribu.

Exercice 8. Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par translation :

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On peut considerer l'ensemble $\mathcal{A} := \{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid x + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 2 : Mesure de Lebesgue, Fonctions mesurables

Exercice 1. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = \lambda(A)$ si A est majoré et $m(A) = +\infty$ sinon.

1. Montrer que m est additive.

2. Est-ce que m est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$?

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces mesurables, et soit $f : \Omega \to \Omega'$.

1. On suppose que $\mathcal{F}'$ contient les singletons de Ω', montrer que si $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors f est mesurable si et seulement si f est constante.

2. On suppose $\Omega' = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, si $A \subset \Omega$, la fonction $f := \mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

2. Montrer que $x \mapsto x\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$ est borélienne.

3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' est borélienne.

Exercice 4. Soient Ω, Ω' deux ensembles non vides. Soient $\mathcal{F}'$ une tribu sur Ω' et f une application de Ω dans Ω'.

1. Montrer que $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{F}') := \left\{ f^{-1}(B) \;\middle|\; B \in \mathcal{F}' \right\}$ est une tribu.

2. Montrer que $\sigma(f)$ est la plus petite tribu rendant f mesurable.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On rappelle que

$$\limsup f_n(x) := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k(x).$$

1. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f, alors $\limsup f_n = f$.

2. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est mesurable. En déduire que la limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Exercice 6. Mesure image. Soit h une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On définit μ_h sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mu_h(B) = \mu(h^{-1}(B)), \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

1. Montrer que μ_h est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. C'est la mesure image de μ par h.
Pour définir la mesure de Lebesgue sur le cercle unité $\mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, on pose

$$f : ([0, 2\pi[, \mathcal{B}([0, 2\pi[)) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$$

définie par $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

2. Justifier que f est mesurable.

On définit alors la mesure de Lebesgue du cercle unité comme la mesure image λ_f.

3. Monter que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ on a

1. $\mathcal{S}^1 \subset B \;\Rightarrow\; \lambda_{\mathcal{S}^1}(B) = 2\pi$
2. $\mathcal{S}^1 \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \lambda_{\mathcal{S}^1}(B) = 0.$

De manière générale, $\lambda_{\mathcal{S}^1}(B)$ est la longueur de la portion de cercle qui est dans B.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces mesurables, et soit $f : \Omega \to \Omega'$. Montrer que lorsque $\mathcal{F}$ est engendrée par une partition dénombrable, les applications mesurables sont celles qui sont constantes sur chaque élément de la partition.

Exercice 8. Caractérisation de la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \forall u \in \mathbb{R}^d,\ \lambda_d(u + B) = \lambda_d(B).$$

2. Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $\mu(B) < +\infty$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est borné. Montrer que μ est égale à $k\lambda$ avec $k \geq 0$.

Exercice 9. L'ensemble de Vitali . On suppose que la mesure de Lebesgue λ s'étend sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble

$$A_x := \{\, y \in [0, 1] \mid\ y - x \in \mathbb{Q} \,\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, A_x est non vide.
Grâce à l'axiome du choix, il existe un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, V contient un unique élément de A_x. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des rationnels inclus dans $[-1, 1]$. Pour tout n, on note alors $V_n := V + q_n$ et $W := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

2. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite disjointe de parties de $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $\lambda(W) \leq 3$. En déduire que $\lambda(V) = 0$ et $\lambda(W) = 0$.

4. Montrer que $[0, 1] \subset W$, conclure.

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 3 : Intégrale de Lebesgue (partie 1)

Dans ce TD, on note $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Sur cet espace, on note : $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables, $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives, $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées, $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives et enfin $\mathscr{L}^1$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Exercice 1. Additivité et relation de Chasles.

1. Vérifier que pour tout $f, g \in \mathcal{E}_+$,

$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

en déduire que cette relation est vraie dans $\mathcal{M}_+$.

2. Montrer que pour tout $f, g \in \mathscr{L}^1$, alors $f+g \in \mathscr{L}^1$.

3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a la relation $(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+$. En déduire que pour tout $f, g \in \mathscr{L}^1$, la relation de la première question est vraie.

4. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$ et $A, B \in \mathcal{F}$ disjoints, on a

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f, \qquad \text{(Chasles)}.$$

Exercice 2. Intégrale et négligeables. *Dans chaque question, on pourra d'abord montrer la proposition pour des fonctions étagées positives.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$, montrer que pour tout $N \in \mathcal{F}$ μ-négligeable on a

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

2. Soit f mesurable nulle μ-presque partout. Montrer que f est intégrable et que

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0.$$

3. Montrer que réciproquement pour tout $f \in \mathcal{M}$,

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \mu - \text{p.p.}$$

4. Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$, alors

$$f \leq g \quad \mu - \text{p.p.} \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \mathrm{d}\mu$$

Exercice 3. On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)e^x, \qquad f_2(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x),$$
$$f_3(x) = x, \qquad f_4(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)e^{e^x} + \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}}(x)e^{-2x} - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-\setminus\mathbb{Q}}(x)e^x.$$

Pour chacune d'elle, dire si la fonction est mesurable, intégrable sur $\mathbb{R}$ et si c'est possible, donner la valeur de son intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Mesure de Dirac. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_z)$ ou δ_z est la mesure de Dirac en $z \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que toute fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.

2. Montrer que si f est positive ou intégrable, alors sont intégrale est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_z = f(z).$$

Exercice 5. Changement de mesure. On considère la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est borélienne.

2. Quelle est sont intégrale pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$? Est-elle intégrable ?

3. On muni à présent $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et de la mesure discrete $\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{k^2}$. Donner son intégrale par apport à μ. La fonction f est elle intégrable ?

Exercice 6. Limite simple et intégrale. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n = \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$.

1. Montrer que la suite (f_n) est une suite de fonctions étagées qui converge simplement vers 0.

2. Quel est la limite des intégrales de f_n ? N'est-ce pas contradictoire avec la définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive ?

Exercice 7. Définition alternative de l'intégrale. Montrer que si f est mesurable positive sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors sont intégrale vérifie

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int_\Omega g \mathrm{d}\mu \;\middle|\; g \text{ étagée positive, } g \leq f \right\}.$$

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 4 : Intégrale de Lebesgue (partie 2)

Dans ce TD, on note $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Sur cet espace, on note : $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables, $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives, $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées, $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives et enfin $\mathscr{L}^1$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Exercice 1. On rappelle le lemme de Fatou : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_+$, alors

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

1. Démontrer ce lemme.

2. En considérant le suite $f_n(x) = ne^{-nx}$ sur $]0, +\infty[$, vérifier qu'on a pas d'égalité en général.

Exercice 2. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{M}_+$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{M}_+$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \leq M,$$

démontrer que

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq M.$$

Exercice 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $t_0 \in U$. On considère une fonction $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall t \in U$, $x \mapsto f(x,t)$ est μ-intégrable,
2. p.p.t. $x \in \Omega$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t_0,
3. il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-intégrable telle que

$$\forall t \in U, \quad \text{p.p.t. } x \in \Omega, \qquad |f(x,t)| \leq g(x).$$

Montrer que la fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t) \mathrm{d}\mu(x)$$

est continue en t_0.

Exercice 4. Limite simple et intégrale. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$. On a montré dans le TD 3 que la suite (f_n) est une suite de fonctions étagées qui converge simplement vers 0.

1. Rappeler la valeur de limite de l'intégrale des f_n.

2. Montrer que les hypothèses du théorème de convergence dominée ne sont pas vérifiées.

Exercice 5. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ou μ est la mesure de comptage.

1. Justifier que toute les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

2. Montrer que pour toute $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

3. Montrer que pour toute suite positive à double indice $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

4. En déduire la valeur de $S = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Théorème fondamental de l'analyse. Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$, continue en 0 et 1 et de dérivée bornée sur $]0,1[$. Montrer que

$$\int_0^1 f' \mathrm{d}\lambda = f(1) - f(0).$$

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{M}_+$, démontrer la formule

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}\big)\mathrm{d}t.$$

Proposer un interprétation géométrique ce cette formule. *Utiliser Fubini.*

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 5 : Théorie des probabilités

Dans ce TD, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Un suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur cet espace est dite indépendante identiquement distribuée (i.i.d.) si les X_n forment une famille de v.a. indépendantes de même loi.

Exercice 1. Indépendance deux à deux. On lance un pièce deux fois de manière indépendante. On note $X \in \{0,1\}$ le résultat du premier lancé et $Y \in \{0,1\}$ le résultat du second. On considère trois événements : $A = \{X = 0\}$, $B = \{Y = 1\}$, $C = \{X = Y\}$. Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas indépendants.

Exercice 2. Jeu de dé. On lance un dé à six faces sans s'arrêter. Proposer une modélisation probabiliste de cette expérience. Calculer la probabilité des événements suivants : A : on obtient que des 6, B : on obtient que des 6 à partir d'un certain rang, C : on obtient au moins un 6, D : on obtient une infinité de 6.

Exercice 3. Convergence de suites de v.a. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On définit les différentes convergences suivantes :

- Convergence presque sûre notée $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} X$ si $X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour $\mathbb{P}$-p.t. $\omega \in \Omega$.
- Convergence essentiellement uniforme notée $X_n \overset{L^\infty}{\to} X$ si $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |X_n - X| \to 0$.
- Convergence en moyenne quadratique notée $X_n \overset{L^2}{\to} X$ si $\mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right] \to 0$.
- Convergence en moyenne notée $X_n \overset{L^1}{\to} X$ si $\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \to 0$.
- Convergence en probabilité noté $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$.
- Convergence en loi notée $X_n \overset{\mathscr{L}}{\to} X$ si pour tout $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a $\mathbb{E}\left[\varphi(X_n)\right] \to \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]$.

1. Monter que

$$X_n \overset{L^\infty}{\to} X \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{L^2}{\to} X \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{L^1}{\to} X \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X.$$

2. Montrer que $X_n \overset{L^\infty}{\to} X \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} X$.

3. On suppose que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} X$. Monter que s'il existe $Y \in \mathscr{L}^1$ telle que pour tout n, $|X_n| \leq Y$ p.s., alors $X_n \overset{L^1}{\to} X$.

4. On suppose que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} X$. Monter que s'il existe $Y \in \mathscr{L}^2$ telle que pour tout n, $|X_n| \leq Y$ p.s., alors $X_n \overset{L^2}{\to} X$.

5. Soit $\varepsilon > 0$ montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \varepsilon$. Justifier que pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, il existe $\eta \in]0, a]$ tel que pour tout $x, x' \in [-2a, 2a]$, si $|x - x'| < \eta$ alors $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon$. En déduire que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{\mathscr{L}}{\to} X$.

6. En utilisant une fonction f bien choisie, monter que si X est constante presque sûrement, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

7. Faire un graphe qui résume ces implications.

Exercice 4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$ (i.e. de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$M_n = \max(U_0, \ldots, U_n) \quad \text{et} \quad X_n = n(1 - M_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq M_n \leq 1$ presque surement.

2. Etudier la convergence de (M_n).

3. Etudier la convergence en loi de (X_n). A-t-on la convergence essentiellement uniforme ?

Exercices supplémentaires

Exercice 5. SOMMES DE V.A. DISCRÈTES. On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi de Bernoulli $\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. On cherche la loi de la somme

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{2^n}.$$

On note F_S la fonction de répartition de S.

1. Justifier que $S(\Omega) = [0,1]$.

2. Montrer que pour tout $t \leq 0$ $F_S(t) = 0$ et pour tout $t \geq 1$, $F_S(t) = 1$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_S(t) = \mathbb{P}\left(X_1 + \sum_{n\geq 1} \frac{X_{n+1}}{2^n} \leq 2t\right).$$

En déduire que $F_S(t) = \frac{1}{2}F_S(2t) + \frac{1}{2}F_S(2t-1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $F_S(t) = t$. Quel est la loi de S ? *On pourra commencer par montrer la propriété pour les réels de la forme* $k2^{-n} \in [0,1]$.

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 6 : Espaces de Lebesgue

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$). Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

1. Montrer que pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ on a $L^q \subset L^p$.

2. Calculer la quantité

$$\sup_{u \in L^q \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^q}}.$$

Cette quantité est appelée la norme d'opérateur de l'injection de L^q dans L^p.

3. Montrer que si $\mu(\Omega) = +\infty$, les espaces L^p et L^q ne sont en général pas comparables.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Montrer que pour tout $\tilde{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on a $|u| \leq \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ μ – p.p.

2. Monter que

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \{C \geq 0 \mid |u| \leq C \ \mu - \text{p.p.}\}$$

est bien un norme sur l'espace vectoriel $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

3. Montrer que si μ est finie, alors pour tout $p \in [1, +\infty)$, on a $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Exercice 3. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$. Comparer les espaces ℓ^p entre eux.

Exercice 4. Soient $a, b \in [1, +\infty]$ avec $a < b$ et $u \in L^a(\mathbb{R}) \cap L^b(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $p \in [a, b]$ on a $|u|^p \leq |u|^a + |u|^b$.

2. En déduire que $\{p \in [1, +\infty[\mid u \in L^p(\mathbb{R})\}$ est un intervalle.

3. Montrer que la fonction $p \mapsto \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$ est continue sur son domaine de définition.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$. On note $X(\Omega) := \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(\Omega)$.

1. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

2. Pour $\Omega =]0, 1[$, trouver une fonction de $f \in X(\Omega)$ qui n'est pas dans $L^\infty(\Omega)$.

3. Soit $f \in X(\Omega)$. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

Exercice 6. TRANSFORMÉE DE FOURIER. Pour tout fonction complexe u dans $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\mathcal{F}u$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et qu'elle est bornée.

2. Montrer que $\mathcal{F}u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

3. Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, montrer que

$$\forall \xi \neq 0, \quad |\mathcal{F}u(\xi)| \leq \frac{\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{|\xi|_\infty}.$$

4. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, en utilisant que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \mathcal{F}u(\xi) = 0$.

5. Montrer que pour tout $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.

6. Montrer que l'algèbre $\left(L^1(\mathbb{R}^d), \star\right)$ n'admet pas d'élément unité.

7. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'équation $u \star u = u$.

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 7 : Topologie

Définition 1 *Dans un espace métrique (X, d) on appelle* **suite de Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *toute suite vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

On dit que l'espace métrique (X, d) est **complet** *si toutes ses suites Cauchy sont convergentes.*

Exercice 1. Soient A, B deux parties d'un espace métrique (X, d).

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Démontrer que $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$, mais que l'inclusion peut être stricte.

3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 2. Frontière. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Montrer les assertions suivantes :

1. $\partial A = \{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \}$,

2. $\partial A = \partial(A^c)$,

3. A fermé si et seulement si $\partial A \subset A$,

4. A ouvert si et seulement si $\partial A \cap A = \emptyset$,

5. si A est fermé, alors $\partial(\partial A) = \partial A$.

Exercice 3. Soit $X =]0, +\infty[$. On définit

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|, \quad \forall x, y \in X.$$

1. Vérifier que d est une distance sur X.

2. Déterminer $B(1, 1)$ pour cette distance.

3. La partie $A =]0, 1]$ est-elle bornée pour cette distance ? fermée ?

4. Déterminer les boules ouvertes de (X, d).

Exercice 4. Distance de Hamming. On muni $\mathbb{R}^n$ de la distance de Hamming : $d(x, y) := \text{card}\{i \mid x_i \neq y_i\}$.

1. Montrer que d est bien une distance sur $\mathbb{R}^d$. Est-elle issue d'une norme ?

2. l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d)$ est-il complet ?

3. Décrire la topologie issue de d.

Exercice 5. On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1])$.

1. Montrer que si une fonction $u \in E$ vérifie $u \geq 0$ presque partout alors $u \geq 0$. En déduire que pour tout $u \in E$,

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)} = \sup_{[0,1]} |u|.$$

2. Montrer que la suite (u_n) de E définie par

$$u_n(x) := n\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right[}(x) + \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right]}(x)$$

est de Cauchy pour la norme L^1 mais n'est pas convergente pour cette norme.

3. Montrer en revanche que $(E, \|.\|_{L^\infty})$ est un espace de Banach.

4. Montrer que (u_n) est bornée pour la norme L^∞.

5. Le suite (u_n) admet-elle une sous-suite convergente ?

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Distance SNCF. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction suivante :

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si} \quad x = \alpha y,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que c'est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle issue d'une norme ?

2. Décrire les boules ouvertes de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d)$.

3. Cet espace métrique est-il complet ?

4. Comparer la topologie issue de d à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Théorème de Fisher-Riesz. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. On souhaite prouver que $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est complet. Soit $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de L^p et (u_n) une suite de représentants quelconques des $\tilde{u}_n$.

1. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\left\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose alors $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_N(x) := \sum_{k=0}^{N} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)|, \quad \forall x \in \Omega.$$

2. Montrer que (v_N) converge simplement vers une limite v telle que $\tilde{v} \in L^p$.

3. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, $(u_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. On note $u(x)$ sa limite.

4. Montrer que pour tout $x \in \Omega$,

$$|u(x) - u_{n_k}(x)| \leq v(x), \quad \forall k \geq 1.$$

5. En déduire que $(\tilde{u}_{n_k})$ converge vers $\tilde{u}$ dans L^p. Ainsi la suite $(\tilde{u}_n)$ admet $\tilde{u}$ comme valeur d'adhérence.

6. Montrer que $(\tilde{u}_n)$ converge vers $\tilde{u}$ dans L^p.

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 8 (analyse) : Dualité, convergence faible et espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit (u_n) un suite de $L^2(0,1)$ qui converge faiblement vers $u \in L^2(0,1)$. Montrer que la primitive $U_n(x) := \int_0^x u_n$ converge fortement vers $U(x) := \int_0^x u$. *On pourra commencer par montrer la convergence simple.*

Exercice 2. Soit (u_n) une suite d'un espace de Hilbert H. Montrer que

$$u_n \overset{H}{\to} u \quad \text{si et seulement si} \quad \|u_n\|_H \to \|u\|_H \text{ et } u_n \overset{H}{\rightharpoonup} u.$$

Exercice 3. Soit D une partie dense d'un espace de Hilbert H. Soit $u \in H$ et (u_n) une suite de H qui vérifie $\langle u_n, v\rangle_H \to \langle u_n, v\rangle_H$ pour tout $v \in D$.

1. Montrer que si (u_n) est bornée, alors elle converge faiblement vers u.

2. Trouver un contre exemple si la suite (u_n) n'est pas bornée. *On pourra considerer la suite de fonctions* $n\mathbf{1}_{[n,2n]}$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. On considère les suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$a_n(x) := \frac{n^2}{n^2+x^2}, \quad b_n(x) := \cos(2\pi n x), \quad c_n(x) := \sqrt{n}e^{-n|x|},$$
$$d_n(x) := \frac{1}{1+n^2x^2}, \qquad e_n(x) := e^{-(x+n)^2}.$$

1. On se place dans $L^2(-1,1)$. Pour chaque suite, étudier la convergence p.p. puis la convergence en norme L^2 et la convergence faible dans $L^2(-1,1)$. *Rappel :* $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^2(\Omega)$.

2. Même question dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne T-périodique telle que $\int_0^T f^2(x)\mathrm{d}x < +\infty$ et soit la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) := f(nx), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On définit la moyenne de f sur une période par

$$\langle f\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

1. Montrer que la moyenne $\langle f\rangle$ est bien définie.

2. Monter la fonction

$$F(t) := \int_0^t f(x) - \langle f \rangle \, \mathrm{d}x$$

est T-périodique et appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.

3. Montrer que la suite (f_n) est une suite bornée dans $L^2(0,T)$.

4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,T)$, en intégrant part partie, étudier la limite de la suite

$$\int_0^T (f_n(x) - \langle f \rangle)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

En déduire la convergence faible et la limite faible de la suite (f_n).

5. La suite (f_n) a-t-elle une limite forte (classique) dans $L^2(0,T)$ ou une limite presque partout en général ?

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Convergence faible en dimension finie

1. Montrer que le dual de $\mathbb{R}^d$ est isomorphe à $\mathbb{R}^d$.

2. Monter qu'une suite de $\mathbb{R}^d$ converge faiblement vers x si et seulement si elle converge (fortement) vers x.

Exercice 7. Montrer que pour $p \neq 2$, $L^p(\Omega)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 8. Dual de $\ell^p(\mathbb{N})$. Soit $p \in]1, +\infty[$ on note p' son exposant conjugué.

1. Soit $v \in \ell^{p'}(\mathbb{N})$. On définit l'application $L_v : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_v u \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n.$$

Montrer que $L_v \in \ell^p(\mathbb{N})'$. En déduire une injection continue $J : \ell^{p'}(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})'$.

2. Montrer que J est une isométrie. *On pourra considérer la suite* $w := (v_n|v_n|^{p'-2})_{n\in\mathbb{N}}$.

On va maintenant montrer que J est surjective. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note la suite e^k définie par $e^k_n = \delta_{k,n}$. C'est-à-dire $e^k_n = 1$ si et seulement si $k = n$.
Soit $L \in \ell^p(\mathbb{N})'$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\lambda_n = Le^n$. Soit $u \in \ell^p(\mathbb{N})$, on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite u^k par $u^k_n = \lambda_n|\lambda_n|^{p'-2}$ si $n \leq k$ et 0 sinon.

3. Montrer que $Lu^k = \sum_{i=0}^k |\lambda_i|^{p'}$. En déduire que $\lambda \in \ell^{p'}(\mathbb{N})$.

4. En déduire que pour tout $u \in \ell^p(\mathbb{N})$, on a $Lu = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\lambda_n$.

CENTRALE LYON

Année 2026-2027

S7 – Outils mathématiques avancés

TD 9 – analyse : Espaces de Sobolev et EDP elliptique

Exercice 1. On se place dans $I :=]0,1[$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u(x) := x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ appartienne à $W^{1,p}(I)$.

Exercice 2. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Montrer que si $u \in W^{1,\infty}(I)$, alors

$$\exists C > 0, \qquad |u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad \text{p.p.t. } (x,y) \in I^2.$$

La réciproque est vraie mais c'est plus difficile.

Exercice 3. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on considère le problème

$$(P) : \begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta. \end{cases}$$

On pose $\tilde{u}(x) := u(x) - (\beta - \alpha)x - \alpha$

1. De quel problème d'EDP avec conditions au bord $(\tilde{P})$ la fonction $\tilde{u}$ est-elle solution ?

2. Montrer que l'existence et l'unicité de la solution faible de $(\tilde{P})$.

3. Montrer l'existence et l'unicité de la solution forte de (P).

Exercice 4. Inégalité de Poincaré Wirtinger. Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $f \in H^1(I)$ telle que $\int_I f = 0$ on a

$$\|f\|_{L^2(I)} \leq (b-a) \left\|f'\right\|_{L^2(I)}.$$

On pourra montrer l'existence d'un point $t_0 \in [a,b]$ tels que $f(t_0) = 0$.

Exercice 5. Pour $f \in L^2(0,1)$, on considère le problème

$$(P) : \begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0,1[\\ u'(0) = \alpha \\ u'(1) = \beta. \end{cases}$$

1. Montrer que l'on a pas unicité de la solution forte.

2. Quelle condition supplémentaire sur u peut-on rajouter pour espérer obtenir l'unicité ?

3. Ecrire la formulation faible de (P). Donner un condition nécessaire sur α β et f pour l'existence d'une solution faible.

4. En choisissant un espace de Hilbert, monter l'existence et l'unité de la solution faible.

5. En déduire l'existence et l'unicité de la solution forte.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Pour $f \in L^2(0,1)$, $a, c \in L^\infty([0,1])$ avec a continue en 0 et 1 et $b \in \mathbb{R}$, on considère le problème

$$(P) : \begin{cases} -(au')' + b\,u' + c\,u = f \quad \text{p.p. sur }]0,1[\\ a(0)u'(0) = h \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

ou avec $a(x) \geq \alpha > 0$ pour tout x, et $c \geq 0$.

1. Donner la formulation faible de ce problème.

2. Montrer que l'existence et l'unicité de la solution faible dans l'espace de Hilbert adéquat.

3. Montrer la solution faible admet un représentant dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ si et seulement si a est continue sur $[0,1]$.

Exercice 7. Homogénéisation. Un matériau conducteur composite est constitué d'une alternance de couches fines d'épaisseur identique de conductivité 1 et 5. On modélise ce matériau de la façon suivante. Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique définie par

$$\sigma(x) = \mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + 5\,\mathbf{1}_{[1/2,1[}(x) \quad \forall x \in [0,1[.$$

Et on définit $\sigma_n(x) := \sigma(nx)$ pour tout $n \geq 1$, la fonction conductivité pour une échelle de couche de taille $\frac{1}{n}$. On s'intéresse à la conductivité effective du matériau. On note u_n le potentiel électrique généré par une source de courant $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Il vérifie le problème

$$\begin{cases} -(\sigma_n u_n')' = f \quad \text{p.p. sur }]0,1[\\ u_n(0) = u_n(1) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n, le problème précédent admet une unique solution u_n dans $H_0^1(0,1)$. Quel est sa régularité ? Montrer que la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(0,1)$.

2. Calculer la limite faible de σ_n puis de $\frac{1}{\sigma_n}$. Que remarque-t-on ?

3. Montrer que (u_n') converge faiblement dans $L^2(0,1)$ et calculer sa limite faible.

4. Montrer que (u_n) converge fortement dans $L^2(0,1)$ et calculer sa limite. De quel problème elliptique est-elle solution ? Quel est la conductivité effective du matériau ? *Cette valeur s'appelle la conductivité homogénéisée.*

Exercice 8. Caractérisation de $H^1(\mathbb{R})$ par différences finies

1. Montrer que si $f \in H^1(\mathbb{R})$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\|f - f(. - h)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C|h|.$$

2. Montrer que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant une telle estimation appartient à $H^1(\mathbb{R})$.