Exercices du cours S8 d'Analyse fonctionnelle

Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert de produits scalaires respectifs $(.,.)_1$ et $(.,.)_2$. Soit $H = H_1 \times H_2$.
a) Vérifier que

$$a((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_2,\ (u_1, u_2) \in H,\ (v_1, v_2) \in H,$$

définit un produit scalaire sur H et que H est alors un espace de Hilbert.
b) Soient $K_i \subset H_i$, $i = 1, 2$, deux ensembles convexes, fermés, non vides. Déterminer la projection dans H sur $K = K_1 \times K_2$

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et

$$K = \{\tilde{f} \in L^2(\Omega),\ f \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

a) Montrer que K est un ensemble convexe, fermé, non vide.
b) Déterminer P_K.

Exercice 3. (Point fixe) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet et soit $\mathcal{T}$ une application de E dans lui-même telle qu'il existe un réel $0 \leq k < 1$ tel que :

$$\forall\ (u, v) \in E^2,\ \|\mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v)\| \leq k\|u - v\|$$

(on dit que $\mathcal{T}$ est une contraction). L'objet de l'exercice est de démontrer que $\mathcal{T}$ a un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un unique $u \in E$ tel que $\mathcal{T}(u) = u$.

a) Soit $u_0 \in E$. On définit par récurrence la suite

$$u_{n+1} = \mathcal{T}(u_n), n \geq 0.$$

Montrer que la suite est de Cauchy et qu'elle converge vers un point fixe de $\mathcal{T}$.
b) Montrer que $\mathcal{T}$ a un unique point fixe.

Exercice 4. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Lax-Milgram en utilisant l'exercice précédent sur les points fixes des applications contractantes.

On se donne un espace de Hilbert H, une forme bilinéaire, continue, coercive a et une forme linéaire L. Soient M et α deux constantes telles que

$$\forall\ (u,v) \in H^2,\ |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$$

$$\forall\ v \in H,\ a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2.$$

a) Vérifier que pour tout $u \in H$, il existe un unique élément de H, noté $A(u)$, tel que

$$\forall v \in H,\ a(u,v) = (A(u),v).$$

Montrer que l'application $u \to A(u)$ est linéaire et que

$$\forall u \in H,\ \|A(u)\| \leq M\|u\| \text{ et } (A(u),u) \geq \alpha\|u\|^2.$$

b) Soit f l'unique élément de H tel que $\forall v \in H,\ L(v) = (f,v)$. Pour $\rho > 0$, on introduit l'application $\mathcal{T}_\rho : H \to H$ définie par $\mathcal{T}_\rho(u) = u - \rho(A(u) - f)$. Vérifier que u est solution de la formulation variationnelle

$$\forall v \in H,\ a(u,v) = L(v)$$

si et seulement si u est un point fixe de $\mathcal{T}_\rho$.

c) Montrer que

$$\forall\ (v_1,v_2) \in H^2,\ \|\mathcal{T}_\rho(v_1) - \mathcal{T}_\rho(v_2)\|^2 \leq (\rho^2M^2 - 2\rho\alpha + 1)\|v_1 - v_2\|^2.$$

En déduire que, pour ρ convenablement choisi, $\mathcal{T}_\rho$ est une contraction. Conclure.

Espaces L^p

Exercice 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$, nulle presque partout et continue sur I. Montrer que f est identiquement nulle sur I.

Exercice 6. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) \quad \text{et} \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Est-ce que f est égale presque partout à une fonction continue ? Même question pour H.

Exercice 7. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[n,2n]}(x).$$

Pour quelles valeurs de $p \geq 1$ la suite (f_n) converge-t-elle dans $L^p(\mathbb{R})$?

Exercice 8. 1) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\rho_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\rho_\epsilon \geq 0, \ \ \text{Supp } \rho_\epsilon \subset [-\epsilon, \epsilon], \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x) dx = 1.$$

Indication : utiliser l'exemple explicite de fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ du cours.
2) (Régularisation de la fonction plateau). Soit $R > 0$ et $0 < \delta < R$. Construire une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x, \ 0 \leq \phi(x) \leq 1 \ ; \ \ \phi(x) = 1 \text{ si } |x| < R - \delta \ ; \ \ \phi(x) = 0 \text{ si } |x| > R + \delta.$$

Indication : considérer le produit de convolution

$$(\rho_\epsilon * \chi_{[-R,R]})(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y) \chi_{[-R,R]}(y) dy.$$

Exercice 9. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
1) Vérifier que $\phi' \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante (sur ϕ) pour qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi' = \phi$.

Espaces de Sobolev en dimension un et formulations variationnelles

Exercice 10. Etudier si $\tilde{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a une dérivée faible et si oui la calculer, avec :

$$u(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } 1 \leq x \\ ex^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 11. On considère la fonction :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que $\tilde{H}$ n'a pas de dérivée faible.

Exercice 12. Soient deux réels $a < b$. Pour $v \in \mathcal{L}^1(]a,b[)$, on définit

$$\forall x \in [a,b], \quad u(x) = \int_a^x v(t)dt.$$

Vérifier que $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

Corrigé. Rappelons le théorème de continuité pour les intégrales dépendant d'un paramètre réel.

Théorème de continuité en un point x_0. *On se donne :*
- $A \subset \mathbb{R}^k$ (mesurable)
- $I \subset \mathbb{R},\ x_0 \in I$
- $f : A \times I \to \mathbb{R},\ (t,x) \rightarrowtail f(t,x)$
tels que :
(i) Pour presque tout $t \in A$, l'application $x \rightarrowtail f(t,x)$ est continue en x_0 ;
(ii) Il existe une fonction $g : A \to \overline{\mathbb{R}^+}$ intégrable telle que, $\forall x \in I$, pour presque tout $t \in A$, $|f(t,x)| \leq g(t)$.
Alors l'application $F(x) = \int_A f(t,x)dt$ est continue en x_0.

Montrons la continuité de $u(x) = \int_a^x v(t)dt$ en tout point $x_0 \in [a,b]$. On note que

$$u(x) = \int_a^b \chi_{[a,x]}(t)v(t)dt \tag{1}$$

où $\chi_{[a,x]}$ désigne la fonction caractéristique du segment $[a,x]$. On va donc appliquer le théorème avec

$$A = [a,b], \quad I = [a,b], \quad f(t,x) = \chi_{[a,x]}(t)v(t). \tag{2}$$

Hypothèse (i) On va montrer que $\forall t \neq x_0$, l'application $x \rightarrowtail f(t,x)$ est continue en x_0.

En effet (faire un dessin est conseillé)

- soit $t < x_0$ (cas impossible si $x_0 = a$). Pour x voisin de x_0 on a $t < x$ et $\chi_{[a,x]}(t) = 1$. Donc $f(t,x) = v(t)$ pour x voisin de x_0, ce qui entraîne la continuité de $x \rightarrowtail f(t,x)$ en x_0.

- soit $t > x_0$ (cas impossible si $x_0 = b$). Pour x voisin de x_0 on a $t > x$ et $\chi_{[a,x]}(t) = 0$. Donc $f(t,x) = 0$ pour x voisin de x_0, ce qui entraîne la continuité de $x \rightarrowtail f(t,x)$ en x_0.

Hypothèse (ii) : $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in [a,b]$, on a $|f(t,x)| \leq |v(t)|$ avec v intégrable, ce qui garantit la condition de domination.

On peut donc appliquer le théorème de continuité et conclure que u est continue en x_0, $\forall x_0 \in [a,b]$. On a donc bien $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

□

Exercice 13. Déterminer les classes d'équivalence $\tilde{u} \in L^1_{loc}(]-\infty,+\infty[)$ dérivables au sens faible jusqu'à l'ordre deux qui sont solutions de l'équation

$$\tilde{u}'' = \tilde{f}$$

où $f = -\chi_{]0,1[} + \chi_{]1,2[}$.

Corrigé. On va faire deux intégrations successives. On résoud d'abord :

$$\tilde{v}' = \tilde{f}$$

qui donne grâce à la proposition 3.7

$$v(x) = \int_0^x f(t)dt + c_1.$$

En remplaçant f par sa valeur, cela donne :

$$v(x) = \bar{v}(x) + c_1, \quad \bar{v}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0; \\ -x \text{ si } 0 \leq x \leq 1; \\ x-2 \text{ si } 1 \leq x \leq 2; \\ 0 \text{ si } x \geq 2. \end{cases}$$

Puis on résoud

$$\tilde{u}' = \tilde{v}$$

qui donne toujours grâce à la proposition 3.7

$$u(x) = \int_0^x v(t)dt + c_2.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer v par sa valeur.

$\square$

Exercice 14. Soit $I =]-1,1[$. Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $H^1(]-1,1[)$?
a) $f(x) = |x|$.
b) $g(x) = 0$ si $x \leq 0$, 1 sinon.
c) $h(x) = x^\alpha$ si $x \geq 0$.

Corrigé.
a) Oui. Le calcul de la dérivée faible a été fait en cours. $\tilde{f}$ et sa dérivée faible sont dans $L^2(]-1,1[)$. Donc $f \in H^1(]-1,1[)$.
b) Non. On a vu dans l'exercice 15 que $\tilde{g}$ n'est pas faiblement dérivable.
c) Cela dépend de α. Comme $h \in C^1(]-1,1[)$, $\tilde{h}$ est faiblement dérivable et sa dérivée faible est la classe d'équivalence de $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. h et h' sont de carré intégrable si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Donc $h \in H^1(]-1,1[)$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

$\square$

Exercice 15. Soit $I =]0, +\infty[$.
Montrer que $\phi \to \|\phi'\|_{L^2(I)}$ est une norme sur $\mathcal{C}_c^\infty(I)$.
Montrer que cette norme n'est pas équivalente à celle induite par $H^1(I)$.
Indication : on pourra montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \|\phi\|_{L^2(I)} \leq c\|\phi'\|_{L^2(I)}.$$

Corrigé. Montrons que $\phi \to \|\phi'\|_{L^2(I)}$ est une norme sur $\mathcal{C}_c^\infty(I)$. On a

$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\|\phi'\|_{L^2(I)} \geq 0$

$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda\phi'\|_{L^2(I)} = |\lambda|\phi'\|_{L^2(I)}$

$\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)^2$, $\|\phi' \ + \psi'\|_{L^2(I)} \leq \|\phi'\|_{L^2(I)} + \|\psi'\|_{L^2(I)}$

$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\|\phi'\|_{L^2(I)} = 0 \Leftrightarrow \phi'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ (comme ϕ est continu). Donc, en intégrant, il existe une réel μ tel que, pour tout $x \in I$, $\phi(x) = \mu$. Comme $\phi(0) = 0$, on a $\mu = 0$ et $\phi = 0$.

Donc $\phi \to \|\phi'\|_{L^2(I)}$ est une norme sur $\mathcal{C}_c^\infty(I)$.

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, on a $\|\phi'\|_{L^2(I)} \leq \|\phi\|_{H^1(I)}$. Les deus normes seraient équivalentes s'il existait une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \|\phi\|_{H^1(I)} \leq c\|\phi'\|_{L^2(I)}. \tag{3}$$

Comme $\|\phi\|_{L^2(I)} \leq \|\phi\|_{H^1(I)}$, (**??**) entraînerait

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \|\phi\|_{L^2(I)} \leq c\|\phi'\|_{L^2(I)} \tag{4}$$

Montrons que la propriété (**??**) est fausse. Pour cela on va fabriquer une suite $(\phi_n)_n$ de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que

$$\frac{\|\phi_n\|_{L^2(I)}}{\|\phi_n'\|_{L^2(I)}} \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5}$$

Par le cours on sait que si I était un intervalle borné la propriété (**??**) serait vraie (inégalité de Poincaré, théorème 3.21). Ici $I =]0, +\infty[$ et le caractère non borné de I est donc fondamental. Il est donc naturel de chercher des ϕ_n de supports "de plus en plus grands". Pour cela on va utiliser un procédé qui dilate le support. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, +\infty[)$ fixée, non identiquement nulle. On considère la suite

$$\phi_n(x) = \phi(\frac{x}{n}) \text{ pour } n \geq 1.$$

Alors $\phi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, +\infty[)$, $\phi_n'(x) = \frac{1}{n}\phi'(\frac{x}{n})$, et le changement de variable $y = x/n$ donne que

$$\|\phi_n\|_{L^2(I)} = \sqrt{n}\|\phi\|_{L^2(I)}, \quad \|\phi_n'\|_{L^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\|\phi'\|_{L^2(I)}.$$

On a donc

$$\frac{\|\phi_n\|_{L^2(I)}}{\|\phi_n'\|_{L^2(I)}} = n\frac{\|\phi\|_{L^2(I)}}{\|\phi'\|_{L^2(I)}} \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty$$

ce qui donne (**??**) et la non-équivalence des normes.

$\square$

Exercice 16. I - Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$. On définit

$$V = \{v \in H^1(I),\ v(x_0) = 0\}.$$

1) Vérifier que V muni de la norme induite par $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.
2) On suppose dans cette question que I est borné. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq c\|v'\|_{L^2(I)}.$$

II - Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné. On considère

$$W = \{v \in H^1(I),\ \int_a^b v(x)dx = 0\}.$$

3) Vérifier que W muni de la norme induite par $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.
4) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall v \in W \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq c\|v'\|_{L^2(I)}.$$

Corrigé.

I - 1) V est le noyau de l'application linéaire L de $H^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L : v \to v(x_0)$. D'après le corollaire 3.17, L est continue. V est donc le noyau d'une application linéaire continue de $H^1(I)$ dans $\mathbb{R}$. Il en résulte que V est un sous-espace fermé de $H^1(I)$ et donc un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par $H^1(I)$ (chapitre 1, proposition 1.3).

I - 2) Par le théorème 3.14, on a

$$\forall v \in V,\ v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^x v'(t)dt.$$

Comme $v(x_0) = 0$ on en déduit :

$$\forall v \in V,\ v(x) = \int_{x_0}^x v'(t)dt. \tag{6}$$

Dans les majorations qui suivent il faut faire attention car dans l'intégrale de (**??**) la borne supérieure n'est pas forcément plus grande que la borne inférieure. Si $x \geq x_0$ on a

$$|v(x)| \leq \int_{x_0}^x |v'(t)|dt \leq \int_a^b |v'(t)|dt$$

alors que si $x \leq x_0$

$$|v(x)| = |\int_x^{x_0} v'(t)dt| \leq \int_{x_0}^x |v'(t)|dt \leq \int_a^b |v'(t)|dt.$$

On conclut que

$$\forall x \in [a,b], \ \ |v(x)| \leq \int_a^b |v'(t)|dt.$$

Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(I)$:

$$\forall x \in [a,b], \ \ |v(x)| \leq \sqrt{b-a}\|v'\|_{L^2(I)}$$

et

$$\|v\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |v(x)| \leq \sqrt{b-a}\|v'\|_{L^2(I)}$$

Enfin

$$\forall v \in V, \ \|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a}\|v\|_\infty \leq (b-a)\|v'\|_{L^2(I)}$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

II - 1) W est le noyau de l'application linéaire K de $H^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $K : v \to \int_a^b v(x)dx$. Vérifions que cette application linéaire est continue. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(I)$, on a :

$$\forall v \in W, \ \ |\int_a^b v(x)dx)| \leq \sqrt{b-a}\|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a}\|v\|_{H^1(I)}.$$

V est le noyau d'une application linéaire continue de $H^1(I)$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc un sous-espace fermé de $H^1(I)$ et un espace de hilbert quand on le munit de la norme induite par $H^1(I)$.

II - 2) Une première solution consiste à utiliser des calculs analogues à ceux de la question I - 2). En effet, si $v \in W$, la fonction v est continue et à moyenne nulle. Donc il existe nécessairement $x_0 \in [a,b]$ tel que $v(x_0) = 0$. On a alors

$$v(x) = \int_{x_0}^x v'(t)dt,$$

et des calculs analogues à ci-dessus donnent

$$\forall v \in W, \ \|v\|_{L^2(I)} \leq (b-a)\|v'\|_{L^2(I)}.$$

La différence avec le cas I est que le point x_0 dépend maintenant de la fonction v considérée mais cela n'a pas d'importance pour la conclusion.

Je présente maintenant une autre preuve qui fait davantage manipuler la formule du théorème 3.14, ce qui est un très bon entraînement pour d'autres exercices. Par cette formule on a

$$\forall v \in W, \ v(x) = v(a) + \int_a^x v'(t)dt. \tag{7}$$

Maintenant $v(a)$ n'a aucune raison d'être nul. On va quand même essayer d'exprimer v en fonction de v' en se servant du fait que v est à moyenne nulle. En intégrant (**??**) sur $[a, b]$, on obtient

$$\int_a^b v(x)dx = (b-a)v(a) + \int_a^b (\int_a^x v'(t)dt)dx$$

d'où comme v est à moyenne nulle

$$v(a) = -\frac{1}{b-a}\int_a^b (\int_a^x v'(t)dt)dx$$

et en revenant à (**??**)

$$\forall v \in W,\ v(x) = -\frac{1}{b-a}\int_a^b (\int_a^x v'(t)dt)dx + \int_a^x v'(t)dt. \tag{8}$$

C'est plus compliqué que (**??**) mais cela va permettre de conclure. On déduit de (**??**) que

$$\forall v \in W,\ \forall x \in [a, b],\ \ |v(x)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_a^x |v'(t)|dtdx + \int_a^x |v'(t)|dt \leq 2\int_a^b |v'(t)|dt \tag{9}$$

Les calculs sont ensuite similaires à ce qui précède. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(I)$:

$$\forall x \in [a, b],\ \ |v(x)| \leq 2\sqrt{b-a}\|v'\|_{L^2(I)}$$

et

$$\|v\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |v(x)| \leq 2\sqrt{b-a}\|v'\|_{L^2(I)}$$

Enfin

$$\forall v \in V,\ \|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a}\|v\|_\infty \leq 2(b-a)\|v'\|_{L^2(I)}$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

□

Exercice 17. On se donne $f \in L^2(]0, 1[)$ et on considère le problème

$$(\mathcal{P})\ \begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } I =]0, 1[\ ; \\ u(0) = 0\ ;\ u(1) = 0\ . \end{cases}$$

1) Donner une formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.
2) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution u.
3) Montrer que la solution u de la formulation variationnelle vérifie $u \in H^2(I)$, $u''(x) = -f(x)$ dans $L^2(]0, 1[)$.

Corrigé.

1) On suppose que u est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test v et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u^{''} v = \int_0^1 u^{'} v^{'} - u^{'}(1)v(1) + u^{'}(0)v(0). \tag{10}$$

Si la fonction test v vérifie $v(0) = v(1) = 0$ (conditions aux limites satisfaites par u), alors (**??**) devient

$$\int_0^1 u^{'} v^{'} = \int_0^1 fv. \tag{11}$$

On introduit donc la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in H_0^1(]0,1[), \\ \\ \forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \end{array} \right. \tag{12}$$

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = H_0^1(]0,1[), \quad a(u,v) = \int_0^1 u'v', \quad L(v) = \int_0^1 fv.$$

Par le cours, $H_0^1(]0,1[)$ muni de la norme induite par $H^1(]0,1[$ est un espace de Hilbert.

l'application a est clairement bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on a

$$\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[)^2, \ |a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Comme $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$, $\|v'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$, on en déduit :

$$\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[)^2, \ |a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Il reste à établir la coercivité de a. On a :

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \ a(v,v) = \int_0^1 (v')^2.$$

Par le corollaire 3.22, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall \ v \in H_0^1(]0,1[), \quad \|v'\|_{L^2(]0,1[)} \geq c\|v\|_{H^1(]0,1[)}. \tag{13}$$

Remarque : on utilise ici de façon essentielle qu'on est dans $H_0^1(]0,1[)$. On a donc

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \ a(v,v) \geq c^2 \|v\|^2_{H^1(]0,1[))},$$

ce qui prouve la coercivité de a.

Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$:

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la continuité de L.
On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution u de (**??**)

3) On commence par montrer que $u' \in H^1(]0,1[)$. On a $C_c^\infty(]0,1[) \subset H_0^1(]0,1[)$. On peut donc prendre $v = \phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ dans (**??**). On a donc

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\ \int_0^1 u'\phi' = \int_0^1 f\phi$$

Ici $u' \in L^2(]0,1[)$ et $f \in L^2(]0,1[)$. Par la définition 3.11 de H^1, on en déduit que $u' \in H^1(]0,1[)$ et

$$(u')' = -f \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

Comme $u \in H^1(]0,1[)$, on conclut que $u \in H^2(]0,1[)$ et $u'' = -f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p.

□

Exercice 18. On se donne $f \in L^2(]0,1[)$ et on considère le problème

$$(\mathcal{P})\ \begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } I =]0,1[\ ; \\ u'(0) = 0\ ;\ u'(1) = 0\ . \end{cases}$$

1) Donner une formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.
2) Quelles hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, ou pas ?
3) Si une solution de la formulation variationnelle (ou du problème $(\mathcal{P})$) existe, est-elle à votre avis unique ?

Corrigé.

1) On suppose que u est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test v et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u''v = \int_0^1 u'v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0).$$

Comme $u'(0) = u'(1) = 0$, on a donc

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \tag{14}$$

On introduit donc la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H^1(]0,1[), \\ \forall v \in H^1(]0,1[),\quad \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \end{cases} \tag{15}$$

2) On va essayer d'appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = H^1(]0,1[), \quad a(u,v) = \int_0^1 u'v', \quad L(v) = \int_0^1 fv.$$

Par le cours, $H^1(]0,1[)$ est un espace de Hilbert.

l'application a est clairement bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on a

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[)^2, \; |a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Comme $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$, $\|v'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$, on en déduit :

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[)^2, \; |a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Etudions la coercivité de a. On a :

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \; a(v,v) = \int_0^1 (v')^2.$$

Par contre maintenant l'analogue de (??) est faux. La forme bilinéaire a n'est pas coercive sur $H^1(]0,1[)$.
Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$:

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \; |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la continuité de L.
Le théorème de Lax-Milgram ne peut pas être appliqué à la formulation variationnelle (??).

3) Il ne peut pas y avoir unicité d'une solution de (??). En effet si u est solution, $u + \alpha$, où α est un réel quelconque, est aussi solution (u n'intervient que via u').

□

Exercice 19. On se donne $f \in L^2(]0,1[)$ et on considère le problème

$$(\mathcal{P}) \; \begin{cases} -2u''(x) + x\, u(x) = f(x) \text{ dans } I =]0,1[\; ; \\ u(0) = 0 \; ; \; u'(1) = 0 \; . \end{cases}$$

1) Donner une formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.
2) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution u.
3) Montrer que la solution u de la formulation variationnelle vérifie $u \in H^2(I)$, $u''(x) = \frac{xu(x)}{2} - \frac{f(x)}{2}$ dans $L^2(]0,1[)$, $u'(1) = 0$.
4) Vérifier que si f est continue sur $[0,1]$, alors u est de classe C^2 sur $[0,1]$ et l'équation est vérifiée en tout point de $[0,1]$.

Corrigé.

1) On suppose que u est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test v et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 fv = -2\int_0^1 u''v + \int_0^1 xu(x)v(x)dx$$

et

$$\int_0^1 fv = 2\int_0^1 u'v' - 2u'(1)v(1) + 2u'(0)v(0) + \int_0^1 xu(x)v(x)dx. \tag{16}$$

Comme $u'(1) = 0$ et si la fonction test v vérifie $v(0) = 0$ (condition aux limites satisfaite par u), alors (**??**) devient

$$2\int_0^1 u^{'}v^{'} + \int_0^1 xu(x)v(x)dx = \int_0^1 fv. \tag{17}$$

On introduit donc

$$H = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(0) = 0\}$$

et la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} u \in H \\ \forall v \in H,\ \ 2\int_0^1 u'v' + \int_0^1 xu(x)v(x)dx = \int_0^1 fv. \end{cases} \tag{18}$$

Ici seule une des deux conditions aux limites satisfaites par u dans le problème aux limites de départ reste dans la formulation variationnelle.

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(0) = 0\},\ \ a(u,v) = 2\int_0^1 u'v' + \int_0^1 xu(x)v(x)dx,\ \ L(v) = \int_0^1 fv.$$

L'espace H est le noyau de l'application linéaire : $v \in H^1(]0,1[) \to v(0)$. Par le cours, cette application est continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$. H est donc un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(]0,1[)$ et donc un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par $H^1(]0,1[)$.

L'application a est clairement bilinéaire. On a

$$|a(u,v)| \leq 2\int_0^1 |u'|\,|v'| + \int_0^1 |x|\,|u(x)|\,|v(x)|\,dx$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et comme $|x| \leq 1$

$$|a(u,v)| \leq 2\|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|u\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)}$$

Comme $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$, $\|u\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$ (et de même pour v), on en déduit :

$$\forall (u,v) \in H^2,\ |a(u,v)| \leq 3\ \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Il reste à établir la coercivité de a. On a :

$$\forall v \in H,\ a(v,v) = 2\int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 xv^2(x)dx \geq 2\int_0^1 (v')^2. \tag{19}$$

Montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall\ v \in H,\quad \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq c\|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Remarque : il s'agit de prouver une inégalité de type Poincaré pour l'espace *H*. On a

$$\forall v \in H,\ v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)dt,$$

et comme $v(0) = 0$:

$$\forall v \in H,\ v(x) = \int_0^x v'(t)dtt.$$

Puis

$$|v(x)| \leq \int_0^x |v'(t)|dt \leq \int_0^1 |v'(t)|dt$$

Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$:

$$\forall x \in [0,1],\quad |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

et

$$\|v\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

Enfin

$$\forall v \in H,\quad \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_\infty \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. Ensuite on obtient que

$$\forall v \in H,\ \|v\|^2_{H^1(]0,1[)} = \|v\|^2_{L^2(]0,1[)} + \|v'\|^2_{L^2(]0,1[)} \leq\ 2\ \|v'\|^2_{L^2(]0,1[)}.$$

En revenant à (**??**) on a donc

$$\forall v \in H,\ a(v,v) \geq 2\int_0^1 (v')^2 \geq \|v\|^2_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui prouve la coercivité de a.
Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$:

$$\forall v \in H,\ |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la continuité de L.
On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution u de (**??**).

3) On commence par montrer que $u' \in H^1(]0,1[)$. On a $C_c^\infty(]0,1[) \subset H^1(]0,1[)$. On peut donc prendre $v = \phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ dans (**??**). On a :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\ \ 2\int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 xu(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f\phi$$

ou

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\ \ \int_0^1 u'\phi' = \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x) - xu(x))\phi(x)dx$$

Ici $u' \in L^2(]0,1[)$ Aussi comme $|xu(x)| \leq |u(x)|$ et que $u \in L^2(]0,1[)$, la fonction $x \to xu(x)$ est dans $L^2(]0,1[)$. Comme $f \in L^2(]0,1[)$, par définition de $H^1(]0,1[)$, on en déduit que $u' \in H^1(]0,1[)$ et

$$(u')'x) = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x)) \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

Comme $u \in H^1(]0,1[)$, on conclut que $u \in H^2(]0,1[)$ et $u'' = -\frac{f}{2} + -\frac{xu}{2}$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p.

Par la formulation variationnelle on a $u(1) = 0$. Il reste à déterminer la condition aux limites en 0. u vérifie

$$\forall v \in H,\ \ 2\int_0^1 u'v' + \int_0^1 xu(x)v(x)dx = \int_0^1 fv \tag{20}$$

Comme $u \in H^2(]0,1[)$, en appliquant la formule d'intégration par partie à u' et v (corollaire 3.15) et comme $v(1) = 0$, on a

$$\forall v \in H,\ \ \int_0^1 u'v' = -\int_0^1 u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = -\int_0^1 u''v - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (**??**)

$$\forall v \in H\ \ -2\int_0^1 u''v + \int_0^1 xu(x)v(x)dx - 2u'(0)v(0) = \int_0^1 fv$$

ou encore

$$\forall v \in H,\ \ \int_0^1 (-2u''(x) + xu(x) - f(x))v(x)dx - 2u'(0)v(0) = 0. \tag{21}$$

On a vu que $u'' = -\frac{f}{2} + \frac{xu}{2}$ dans $L^2(]0,1[)$. L'intégrale dans (**??**) est donc nulle et on a

$$\forall v \in H,\ \ -2u'(0)v(0) = 0. \tag{22}$$

En prenant $v(x) = 1 - x$ qui appartient à H, on trouve $u'(0) = 0$.

4) Supposons $f \in C([0,1])$. Comme $u' \in H^1(]0,1[)$ et, au sens faible, $(u')' = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x))$, dans $L^1_{loc}(]0,1[)$, la proposition 3.7 entraîne qu'il existe un réel γ tel que

$$u' \in C([0,1]) \text{ et } u'(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(-f(t) + tu(t))dt + \gamma \text{ pour tout } .x \in [0,1]. \tag{23}$$

Comme $\frac{1}{2}(-f(x) + xu(x)) \in C([0,1])$, la formule intégrale dans (**??**) entraîne

$$u' \in C^1([0,1]) \text{ et } .(u')'(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x)) \text{ pour tout } .x \in [0,1].$$

Finalement, comme on a aussi,

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt + \delta \text{ pour tout } .x \in [0,1],$$

avec $u' \in C^1([0,1])$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on conclut que $u \in C^2([0,1])$ et $u''(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + xu(x))$ pour tout $.x \in [0,1]$.

□

Exercice 20. Soit $f \in L^2(]0,1[)$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u''(x) + u'(x) + (3+x)u(x) = f(x) \text{ dans } I =]0,1[\ ; \\ u'(0) = \alpha \ ; \ u'(1) = \beta \ . \end{cases}$$

1) Donner une formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.
2) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution u.
3) Montrer que la solution u de la formulation variationnelle vérifie $u \in H^2(I)$, $u''(x) = u'(x) + (3+x)u(x) - f(x)$ dans $L^2(]0,1[)$, $u'(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$.

Corrigé.

1) On suppose que u est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test v et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u''v + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx$$

et

$$\int_0^1 fv = \int_0^1 u'v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx. \tag{24}$$

Comme $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$, (**??**) devient

$$\int_0^1 u'v' - \beta v(1) + \alpha v(0) + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 fv$$

On introduit donc la formulation variationnelle :

$$\left\{\begin{array}{c} u \in H^1(]0,1[) \\ \\ \forall v \in H^1(]0,1[), \quad \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 fv + \beta v(1) - \alpha v(0). \end{array}\right. \tag{25}$$

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = H^1(]0,1[), \quad a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 fv + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

Par le cours H est un espace de Hilbert .

L'application a est clairement bilinéaire. On a

$$|a(u,v)| \leq \int_0^1 |u'|\,|v'| + \int_0^1 |u'|\,|v| + \int_0^1 (3+x)\,|u(x)|\,|v(x)|\,dx$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et comme $3+x \leq 4$

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} + 4\|u\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)}$$

Comme $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$, $\|u\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$ (et de même pour v). On en déduit :

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[)^2, \; |a(u,v)| \leq 6\, \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Il reste à établir la coercivité de a. On a :

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \; a(v,v) = \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 vv' + \int_0^1 (3+x)v(x)^2 dx$$

Comme $\forall x \in [0,1], \; xv(x)^2 \geq 0$, on a :

$$a(v,v) \geq \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 vv' + 3\int_0^1 v^2 \tag{26}$$

Ici $\int_0^1 vv'$ est un terme qui n'a pas de signe et qu'il faut chercher à compenser avec les deux autres. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ on a

$$|\int_0^1 vv'| \leq \|v\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$

et en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ vérifiée pour tous réels a et b :

$$|\int_0^1 vv'| \leq \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(]0,1[)} + \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(]0,1[)} \tag{27}$$

En combinant (**??**) et (**??**) on conclut que, pour tout $v \in H^1(]0,1[)$:

$$a(v,v) \geq \int_0^1 (v')^2 + 3\int_0^1 v^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 v^2$$

$$a(v,v) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2 + \frac{5}{2}\int_0^1 v^2 \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui prouve la coercivité de a.
Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$:

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ |\int_0^1 fv| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

Ensuite, par le cours, les applications $v \to v(1)$ et $v \to v(0)$ sont continues de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$. L est donc bien continue.
On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution u de (**??**).

3) On commence par montrer que $u' \in H^1(]0,1[)$. On a $C_c^\infty(]0,1[) \subset H^1(]0,1[)$. On peut donc prendre $v = \phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ dans (**??**). Comme $\phi(1) = \phi(0) = 0$, on a :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\quad \int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 u'\phi + \int_0^1 (3+x)u(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f\phi$$

ou

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[),\quad \int_0^1 u'\phi' = \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x) - u'(x) - (3+x)u(x))\phi(x)dx$$

Ici $u' \in L^2(]0,1[)$ Aussi comme $(3+x)|u(x)| \leq 4|u(x)|$ et que $u \in L^2(]0,1[)$, la fonction $x \to (3+x)u(x)$ est dans $L^2(]0,1[)$. Comme $f \in L^2(]0,1[)$, par définition de $H^1(]0,1[)$, on en déduit que $u' \in H^1(]0,1[)$ et

$$(u')'(x) = -f(x) + u'(x) + (3+x)u(x) \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

Comme $u \in H^1(]0,1[)$, on conclut que $u \in H^2(]0,1[)$ et $u"(x) = -f(x)+u'(x)+(3+x)u(x)$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p.

Il reste à déterminer les conditions aux limites. u vérifie

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\quad \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u'v + \int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 fv + \beta v(1) - \alpha v(0) \quad (28)$$

Comme $u \in H^2(]0,1[)$, en appliquant la formule d'intégration par partie à u' et v (corollaire 3.15), on a

$$\int_0^1 u'v' = -\int_0^1 u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (**??**)

$$-\int_0^1 u''v+\int_0^1 u'v+\int_0^1 (3+x)u(x)v(x)dx+u'(1)v(1)-u'(0)v(0)=\int_0^1 fv+\beta v(1)-\alpha v(0)$$

ou encore

$$\int_0^1 (-u''(x)+u'(x)+(3+x)u(x)-f(x))v(x)dx+u'(1)v(1)-u'(0)v(0)-\beta v(1)+\alpha v(0)=0. \tag{29}$$

On a vu que $u''(x)=u'(x)+(3+x)u(x)-f(x)$ dans $L^2(]0,1[)$. L'intégrale dans (**??**) est donc nulle et on a

$$\forall v\in H^1(]0,1[),\quad u'(1)v(1)-u'(0)v(0)-\beta v(1)+\alpha v(0)=0. \tag{30}$$

En prenant $v(x)=x$, on en déduit $u'(1)=\beta$, et en prenant $v(x)=1-x$, on trouve $u'(0)=\alpha$.

Exercice 21. Soit $f\in L^2(]0,1[)$. On considère le problème

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} -u''=f \text{ dans } I=]0,1[\ ; \\ u(0)=u(1)\ ;\ u'(0)=u'(1); \\ \int_0^1 u(x)dx=0. \end{cases}$$

1) Montrer que si ce problème admet une solution $u\in H^2(I)$ alors nécessairement :

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

On suppose désormais que $\int_0^1 f(x)dx=0$.
2) Donner une formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.
3) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution u.
4) Montrer que la solution u de la formulation variationnelle vérifie $u\in H^2(I)$, $u''=-f$ et $u'(0)=u'(1)$.

Corrigé.

1) On suppose que le problème aux limites $(\mathcal{P})$ possède une solution $u\in H^2(]0,1[)$. On intègre sur $[0,1]$ l'équation. Cela donne

$$-\int_0^1 u''=\int_0^1 f \tag{31}$$

Comme $u'\in H^1(]0,1[)$, par le théorème 3.14, on a

$$\int_0^1 u''=\int_0^1 (u')'=u'(1)-u'(0)=0$$

au vu de conditions aux limites satisfaites par u. L'égalité (**??**) entraîne donc

$$\int_0^1 f(x)dx = 0. \tag{32}$$

On suppose dans la suite cette condition réalisée.

2) On suppose que u est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test v et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u''v = \int_0^1 u'v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0).$$

Comme $u'(0) = u'(1)$, et en supposant $v(0) = v(1)$ on a donc

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \tag{33}$$

On introduit donc

$$H = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(0) = v(1),\ \int_0^1 v(x)dx = 0\}$$

et la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in H, \\ \\ \forall v \in H,\ \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv. \end{array} \right. \tag{34}$$

3) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(0) = v(1),\ \int_0^1 v(x)dx = 0\},\ \ a(u,v) = \int_0^1 u'v',\ \ L(v) = \int_0^1 fv.$$

Introduisons les deux applications linéaires L_1 et L_2 de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$ données par

$$L_1(v) = v(0) - v(1),\ \ L_2(v) = \int_0^1 v(x)dx.$$

Par le cours L_1 est la différence de deux applications linéaires continues, et donc est continue. Puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on a :

$$\forall v \in H,\ \ |L_2(v))| \leq \|v\|_{L^2(]0,1)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1)}$$

ce qui entraîne la continuité de L_2. Comme

$$H = \mathrm{Ker} L_1 \bigcap \mathrm{Ker} L_2$$

H est l'intersection de deux fermés, donc un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(]0,1[)$. C'est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par $H^1(]0,1[)$.

l'application a est clairement bilinéaire. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on a

$$\forall (u,v) \in H^2,\ |a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)} \|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Comme $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$, $\|v'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$, on en déduit :

$$\forall (u,v) \in H^2,\ |a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Etudions la coercivité de a. On a :

$$\forall v \in H,\ a(v,v) = \int_0^1 (v')^2.$$

Soit

$$W = \{v \in H^1(]0,1[),\ \int_0^1 v(x)dx = 0\}.$$

On peut montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall v \in W \quad \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq c\|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

C'est l'exercice ??, question 2, dont je ne ré-écris pas la solution, mais qu'il faut savoir refaire. Comme $H \subset W$ on en déduit que

$$\forall v \in H,\quad \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq c\|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Ensuite on obtient que

$$\forall v \in H,\ \|v\|^2_{H^1(]0,1[)} = \|v\|^2_{L^2(]0,1[)} + \|v'\|^2_{L^2(]0,1[)} \leq\ (c^2+1)\ \|v'\|^2_{L^2(]0,1[)}.$$

On en déduit que

$$\forall v \in H,\ a(v,v) \geq \frac{1}{c^2+1}\|v\|^2_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui entraîne la coercivité de a.
Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$:

$$\forall v \in H,\ |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

ce qui donne la continuité de L.
Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité d'une solution de la formulation variationnelle (**??**).

4) **Attention : on est dans un cas où $C_c^\infty(]0,1[)$ n'est pas inclus dans H.** Soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$. Alors la fonction $\psi(x) = \phi(x) - \int_0^1 \phi$ appartient à H ; en effet elle appartient

à $H^1(]0,1[)$, est à moyenne nulle et $\psi(1) = \psi(0) = -\int_0^1 \phi$. On peut donc prendre $v = \psi$ dans (**??**). Cela donne :

$$\int_0^1 u'\psi' = \int_0^1 f\psi$$

et au vu de la définition de ψ :

$$\int_0^1 u'\phi' = \int_0^1 f(x)(\phi(x) - \int_0^1 \phi)dx = \int_0^1 f\phi - (\int_0^1 f)(\int_0^1 \phi)$$

En utilisant la condition (**??**) sur f, on conclut que

$$\int_0^1 u'\phi' = \int_0^1 f\phi$$

et ceci pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$. Ici $u' \in L^2(]0,1[)$ et $f \in L^2(]0,1[)$. Par la définition de $H^1(]0,1[)$ il en résulte que $u' \in H^1(]0,1[)$ et

$$(u')' = -f \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

Comme $u \in H^1(]0,1[)$, on conclut que $u \in H^2(]0,1[)$ et $u" = -f$ dans $L^2(]0,1[)$ et p.p.

Il reste à montrer que $u'(0) = u'(1)$. u vérifie

$$\forall v \in H \quad \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \tag{35}$$

Comme $u \in H^2(]0,1[)$, en appliquant la formule d'intégration par partie à u' et v (corollaire 3.15), on a

$$\int_0^1 u'v' = -\int_0^1 u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Donc en revenant à (**??**)

$$-\int_0^1 u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv$$

ou encore

$$\int_0^1 (-u'' - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0. \tag{36}$$

On a vu que $u'' = -f$ dans $L^2(]0,1[)$. L'intégrale dans (**??**) est donc nulle et on a

$$\forall v \in H, \ \ u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0. \tag{37}$$

En prenant $v(x) = \cos(2\pi x)$ qui est dans H (par exemple), on en déduit $u'(1) = u'(0)$.

$\square$

Topologie faible

Exercice 22. On considère $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$. Montrer qu'un suite $(\mathbf{x}_n)_n$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Corrigé. Une suite convergeant fortement converge faiblement. Il s'agit de démontrer la réciproque dans un espace de dimension finie. Introduisons $\{\mathbf{e}_1, ., , , , \mathbf{e}_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{e}_i.$$

Pour tout $1 \leq i \leq N$, l'application coordonnée $\mathbf{x} \to x_i$ est linéaire continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ car, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, on a $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|$.

Soit $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite convergeant faiblement vers $\mathbf{u}$. On décompose sur la base :

$$\forall n,\ \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^N u_i^n \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{e}_i.$$

Les applications coordonnées étant linéairea continues

$$\forall i, \quad u_i^n \to u_i \text{ quand } n \to +\infty.$$

Il en résulte que

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^N (u_i^n - u_i)^2 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

et $(\mathbf{u}_n)_n$ converge vers $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^N$ fort.

$\square$

Exercice 23. Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La dimension de H est finie.

(b) La boule unité fermée $B(0,1) = \{u \in H, \|u\| \leq 1\}$ est compacte (pour la topologie forte).

Corrigé. On sait que si H est de dimension finie, la boule unité fermée est compacte (pour la topologie forte). Il s'agit de démontrer la réciproque. Soit H un espace de Hilbert séparable non de dimension finie. On va montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte. L'espace H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$. Pour tout n, on a $e_n \in B(0,1)$ et pourtant la suite $(e_n)_n$ ne possède pas de sous-suite convergeante car si $p \neq q$ on a $\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}$.

$\square$

Exercice 24. Soit $I =]0,1[$, $\alpha > 0$, et

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(a) Etudier la convergence presque partout de la suite $(f_n)_n$ quand $n \to +\infty$.

(b) Etudier la convergence forte dans $L^2(]0,1[)$ de la suite $(\tilde{f}_n)_n$ quand $n \to +\infty$.

(c) Etudier la convergence faible dans $L^2(]0,1[)$ de la suite $(\tilde{f}_n)_n$ quand $n \to +\infty$.
Rappel : l'espace des fonctions en escalier sur $[0,1]$ *est dense dans* $L^2(0,1)$.

Corrigé. (a) Soit $x \in]0,1]$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{n} < x$. Alors $\forall n \geq n_0,\ f_n(x) = 0 \to 0$ quand $n \to +\infty$. La suite (f_n) converge vers 0 pour presque tout x dans $[0,1]$.

(b) Comme il y a convergence p.p. vers 0, si la suite $(\tilde{f}_n)$ converge fortement dans $L^2(]0,1[)$ ce ne peut être que vers $\tilde{0}$ (à cause du théorème 2.4). On est donc ramené à se demander si la suite $\|f_n\|_{L^2(]0,1[)}$ converge vers 0. Un calcul immédiat donne

$$\int_0^1 f_n(x)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^{2\alpha} dx = n^{2\alpha-1} \tag{38}$$

et $\|f_n\|_{L^2(]0,1[)} \to 0$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$. La suite $(\tilde{f}_n)_n$ converge fortement dans $L^2(]0,1[)$ si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$.

(c) On va discuter suivant les valeurs de α. Si $\alpha < \frac{1}{2}$, la suite est fortement convergente donc faiblement convergente. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, au vu de (**??**), la suite $\|f_n\|_{L^2(]0,1[)}$ n'est pas bornée donc la suite $(\tilde{f}_n)_n$ ne converge pas faiblement quand $n \to +\infty$.
Il reste le cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Comme la suite $\|f_n\|_{L^2(]0,1[)}$ est bornée, au vu de la proposition 4.4 (i) du cours, il suffit d'étudier la limite de

$$\int_0^1 f_n(x)e(x)dx$$

où e est une fonction en escalier. Soit $a_0 = 0 < a_1 < ... < a_k = 1$ une subdivision associée à la fonction en escalier e. Alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{n} < a_1$. On a $e(x) = \beta \in \mathbb{R}$ sur $]a_0, a_1[$. Donc pour $n \geq n_0$:

$$\int_0^1 f_n(x)e(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)e(x)dx = \beta n^{\alpha-1} = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

La suite $(\tilde{f}_n)_n$ converge vers $\tilde{0}$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(0,1)$ faible.

□

Exercice 25. Soit $\Omega =]0,2\pi[$ et $f_n(x) = \sin nx$. Etudier la convergence faible dans $L^2(]0,2\pi[)$ de la suite (f_n) quand $n \to +\infty$. Y a-t-il convergence forte de la suite (f_n) ?

Indication : on pourra utiliser une base hilbertienne de $L^2(0,2\pi)$.

Exercice 26. Soit $f \in L^2(]0,1[)$ et n un entier strictement positif. On considère le problème

$$(\mathcal{P}_n) \left\{ \begin{array}{l} -u'' = f \text{ dans } I =]0,1[\ ; \\ u'(0) = nu(0) \ ; \ u(1) = 0 \ . \end{array} \right.$$

Ce problème dépend du paramètre n.

I - Dans la première partie, n est fixé.

1) Donner une formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_n)$.

2) Montrer que le problème variationnel possède une unique solution.

II - On va maintenant faire varier n et on note u_n la solution de la formulation variationnelle associée à $(\mathcal{P}_n)$ dans la partie I. 0n s'intéresse à la limite de u_n quand $n \to +\infty$.

1) Montrer qu'il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que, $\forall n \geq 1$, on a

$$\|u_n\|_{H^1} \leq c_1, \quad |u_n(0)| \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}.$$

2) Vérifier qu'on peut extraire de u_n une sous-suite $u_{\psi(n)}$ convergeant faiblement dans H vers une limite que l'on notera u^*.

Montrer que u^* est la solution d'un problème aux limites que l'on déterminera.

Montrer que la famille entière u_n converge faiblement vers u^* dans H quand $n \to +\infty$.

3) Montrer que la famille entière u_n converge fortement vers u^* dans H quand $n \to +\infty$.

Corrigé.

I - 1) On suppose que u est solution du problème aux limites. En multipliant l'équation par une fonction test v et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 fv = -\int_0^1 u''v$$

et

$$\int_0^1 fv = \int_0^1 u'v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) \tag{39}$$

Comme $u'(0) = nu(0)$ et si la fonction test v vérifie $v(1) = 0$ (condition aux limites satisfaite par u), alors (**??**) devient

$$\int_0^1 u^{'}v^{'} + nu(0)v(0) = \int_0^1 fv. \tag{40}$$

On introduit donc

$$H = \{v \in H^1(]0,1[), \ v(1) = 0\}$$

et la formulation variationnelle :

$$\left\{\begin{array}{c} u \in H \\ \\ \forall v \in H, \ \ \int_0^1 u'v' + nu(0)v(0) = \int_0^1 fv. \end{array}\right. \tag{41}$$

2) On va appliquer le théorème de Lax-Milgram avec

$$H = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(1) = 0\},\ \ a(u,v) = \int_0^1 u'v' + nu(0)v(0),\ \ L(v) = \int_0^1 fv.$$

L'espace H est le noyau de l'application linéaire : $v \in H^1(]0,1[) \to v(1)$. Par le cours, cette application est continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$. H est donc un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(]0,1[)$ et donc un espace de Hilbert quand on le munit de la norme induite par $H^1(]0,1[)$.

L'application a est clairement bilinéaire. On a

$$|a(u,v)| \leq \int_0^1 |u'|\ |v'| + n\ |u(0)|\ |v(0)| \tag{42}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et comme $\|u'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}$ et de même pour v, on a :

$$\int_0^1 |u'|\ |v'| \leq \|u'\|_{L^2(]0,1[)}\|v'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

Comme $H^1(]0,1[)$ s'injecte de façon continue dans $L^\infty(]0,1[)$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ \ \|v\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |v(x)| \leq c\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

En revenant à (**??**) on conclut que

$$\forall (u,v) \in H^2,\ \ |a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} + nc^2\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} \tag{43}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire.
Il reste à établir la coercivité de a. On a :

$$\forall v \in H,\ a(v,v) = \int_0^1 (v')^2 + nv(0)^2 \geq \int_0^1 (v')^2. \tag{44}$$

Montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall\ v \in H,\ \ \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq c\|v'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

On a

$$\forall v \in H,\ v(x) = v(1) + \int_1^x v'(t)dt,$$

et comme $v(1)=0$:
$$\forall v \in H,\ v(x) = \int_1^x v'(t)dtt.$$
Puis
$$|v(x)| \leq \int_x^1 |v'(t)|dt \leq \int_0^1 |v'(t)|dt$$
Ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$:
$$\forall x \in [0,1],\ \ |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$
et
$$\|v\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)}$$
Enfin
$$\forall v \in H,\ \ \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_\infty \leq \|v'\|_{L^2(]0,1[)} \tag{45}$$
ce qui est l'inégalité recherchée. Ensuite on obtient que
$$\forall v \in H,\ \|v\|^2_{H^1(]0,1[)} = \|v\|^2_{L^2(]0,1[)} + \|v'\|^2_{L^2(]0,1[)} \leq\ 2\ \|v'\|^2_{L^2(]0,1[)}. \tag{46}$$
En revenant à (**??**), on a donc
$$\forall v \in H,\ a(v,v) \geq \int_0^1 (v')^2 \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(]0,1[)}, \tag{47}$$
ce qui prouve la coercivité de a.
Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,1[)}$:
$$\forall v \in H,\ |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$
ce qui donne la continuité de L.
On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution u de (**??**).

II - 1) Pour tout $n \geq 1$, u_n est l'unique solution de
$$\left\{\begin{array}{c} u_n \in H \\ \\ \forall v \in H,\ \ \int_0^1 u_n' v' + n u_n(0)v(0) = \int_0^1 fv. \end{array}\right. \tag{48}$$
On prend $v = u_n$ dans (**??**). Cela donne
$$\forall n,\ \ \int_0^1 (u_n')^2 + n u_n(0)^2 = \int_0^1 f u_n.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit

$$\forall n, \quad \int_0^1 (u_n')^2 + n u_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u_n\|_{L^2(]0,1[)}$$

puis par l'analogue de l'inégalité de Poincaré dans H, c'est-à-dire (**??**)

$$\forall n, \quad \int_0^1 (u_n')^2 + n u_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u_n'\|_{L^2(]0,1[)} \tag{49}$$

Comme $n u_n(0)^2 \geq 0$, (**??**) entraîne

$$\forall n, \quad \int_0^1 (u_n')^2 = \|u_n'\|^2_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u_n'\|_{L^2(]0,1[)}$$

d'où

$$\forall n, \quad \|u_n'\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \tag{50}$$

et par (**??**)

$$\forall n, \quad \|u_n\|_{H^1(]0,1[)} \leq \sqrt{2}\, \|f\|_{L^2(]0,1[)}. \tag{51}$$

On revient maintenant à (**??**). Comme $\int_0^1 (u_n')^2 \geq 0$, cette inégalité entraîne

$$\forall n, \quad n u_n(0)^2 \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u_n'\|_{L^2(]0,1[)}$$

d'où en utilisant (**??**)

$$\forall n, \quad n u_n(0)^2 \leq \|f\|^2_{L^2(]0,1[)}$$

d'où

$$\forall n, \quad |u_n(0)| \leq \frac{\|f\|_{L^2(]0,1[)}}{\sqrt{n}} \tag{52}$$

2) Par (**??**), la suite $(u_n)_n$ est bornée dans H qui est un espace de Hilbert. On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergeante : il existe une sous-suite $(u_{\psi(n)})_n$ et il existe $u^* \in H$ et $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans H faible. Pour tout n, $u_{\psi(n)}$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{\psi(n)} \in H \\ \\ \forall v \in H, \quad \int_0^1 u_{\psi(n)}' v' + \psi(n) u_{\psi(n)}(0) v(0) = \int_0^1 f v. \end{array} \right. \tag{53}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$. Comme $\phi(1) = 0$ on a $\phi \in H$ et on peut donc prendre $v = \phi$ dans (**??**), ce qui donne :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[), \quad \int_0^1 u_{\psi(n)}' \phi' + \psi(n) u_{\psi(n)}(0) \phi(0) = \int_0^1 f \phi$$

Comme $\phi(0) = 0$, on conclut

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[), \quad \int_0^1 u_{\psi(n)}' \phi' = \int_0^1 f \phi \tag{54}$$

On peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans le membre de gauche de l'égalité (**??**) car l'application $w \to \int_0^1 w'\phi'$ est linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$ et $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans H faible. On a

$$\int_0^1 u'_{\psi(n)}\phi' \to \int_0^1 (u^*)'\phi' \text{ quand } n \to +\infty.$$

Le passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans (**??**) donne donc :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[), \quad \int_0^1 (u^*)'\phi' = \int_0^1 f\phi. \tag{55}$$

Cela donne l'équation vérifiée par u^*. Comme $(u^*)' \in L^2(]0,1[)$ et $f \in L^2(]0,1[)$, (**??**) entraîne que $(u^*)' \in H^1(]0,1[)$ et $((u^*)')' = -f$. D'où $u^* \in H^2(]0,1[)$ et

$$-(u^*)'' = f \text{ dans } L^2(]0,1[). \tag{56}$$

Déterminons maintenant les conditions aux limites satisfaites par u^*. Comme $u^* \in H$, on a $u^*(1) = 0$. Ensuite comme l'application $w \to w(0)$ est linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$ et $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans H faible, on a

$$u_{\psi(n)}(0) \to u^*(0) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{57}$$

La majoration (**??**) donne pour la suite extraite

$$\forall n, \quad |u_{\psi(n)}(0)| \leq \frac{\|f\|_{L^2(]0,1[)}}{\sqrt{\psi(n)}} \tag{58}$$

Comme $\psi(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ on déduit de (**??**) que

$$u_{\psi(n)}(0) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{59}$$

Par unicité de la limite, (**??**) et (**??**) entraînent que

$$u^*(0) = 0.$$

u^* vérifie donc

$$\begin{cases} u^* \in H^1(]0,1[), \quad u^*(1) = 0, \quad u^*(0) = 0, \\ \\ \forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[), \quad \int_0^1 (u^*)'\phi' = \int_0^1 f\phi. \end{cases} \tag{60}$$

Pour montrer que la famille entière u_n converge faiblement vers u^* dans H quand $n \to +\infty$, on va prouver qu'il existe une unique u^* solution de (**??**). Mais **attention** : (**??**) n'est pas une formulation variationnelle car u^* et la fonction test ϕ ne sont pas dans le même espace. Ici

$$u^* \in H_0^1(]0,1[).$$

On remarque toutefois que l'argument conduisant à (**??**) s'applique encore si on remplace $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ par $v \in H_0^1(]0,1[)$, car $v \in H$ et $v(0) = 0$. On a donc

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 (u^*)'v' = \int_0^1 fv$$

u^* vérifie donc

$$\left\{ \begin{array}{c} u^* \in H_0^1(]0,1[), \\ \\ \forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 (u^*)'v' = \int_0^1 fv \end{array} \right. \tag{61}$$

Remarque : il y a deux autres méthodes pour obtenir (**??**) *:*
- raisonnement par densité et continuité à partir de (**??**)
- multiplication de l'équation dans (**??**) *par* $v \in H_0^1(]0,1[)$ *et intégration par parties, ce n'est pas formel ici*

On vérifie qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à (**??**) **(fait dans l'exercice ?? que je ne ré-écris pas)**. La solution du problème (**??**) est donc unique.

La suite $(u_n)_n$ est bornée dans H séparable (car sous-espace fermé d'un espace séparable), donc appartient à un compact pour la topologie faible. Montrons qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit l une valeur d'adhérence. Il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})_n$ telle que $u_{\phi(n)} \rightharpoonup l$ quand $n \to +\infty$ dans H faible. Exactement comme ci-dessus pour la suite $(u_{\psi(n)})_n$, on montre que l est solution de (**??**). Comme (**??**) possède une unique solution u^*, on a donc $l = u^*$.
La suite $(u_n)_n$ appartenant à un compact pour la topologie faible et ayant une unique valeur d'adhérence (faible), on a que $u_n \rightharpoonup u^*$ dans H faible quand $n \to +\infty$.

3) u^* et u_n sont respectivement solutions de

$$\left\{ \begin{array}{c} u^* \in H_0^1(]0,1[), \\ \\ \forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 (u^*)'v' = \int_0^1 fv \end{array} \right. \tag{62}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} u_n \in H = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(1) = 0\} \\ \\ \forall v \in H, \quad a_n(u_n, v) = \int_0^1 u_n' v' + n u_n(0) v(0) = \int_0^1 fv. \end{array} \right. \tag{63}$$

On a donc

$$\forall v \in H, \quad \int_0^1 (u_n - u^*)'v' + n u_n(0) v(0) = 0. \tag{64}$$

Considérons

$$a_n(u_n - u^*, u_n - u^*) = \int_0^1 (u_n - u^*)'(u_n - u^*)' + n u_n(0)(u_n(0) - u^*(0)). \tag{65}$$

Comme $u^*(0) = 0$, on a $nu_n(0)(u_n(0) - u^*(0)) = nu_n(0)^2$. Grâce à (**??**) pour $v = u_n$, l'égalité (**??**) devient

$$a_n(u_n - u^*, u_n - u^*) = -\int_0^1 (u_n - u^*)'(u^*)'. \tag{66}$$

Comme $w \to -\int_0^1 (u^*)'w'$ est linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$ et $u_n - u^* \rightharpoonup 0$ dans H faible, on peut passer à dans (**??**) et on obtient :

$$a_n(u_n - u^*, u_n - u^*) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{67}$$

Par (**??**), pour tout n, on a $a_n(u_n - u^*, u_n - u^*) \geq \frac{1}{2}\|u_n - u^*\|^2_{H^1(]0,1[)}$. On déduit donc de (**??**) que $u_n \to u^*$ dans H fort.

$\square$

Exercice 27. Soit $f \in L^2(]1,2[)$ et n un entier strictement positif. Pour $(u,v) \in H_0^1(]0,3[)^2$ on pose

$$a_n(u,v) = \int_0^3 u'v' + n\int_0^1 uv + n\int_2^3 uv, \quad L(v) = \int_1^2 fv.$$

1) Pour tout $n > 0$, montrer que la formulation variationnelle

$$\begin{cases} u_n \in H_0^1(]0,3[) \\ \forall v \in H_0^1(]0,3[), \quad a_n(u_n, v) = L(v), \end{cases}$$

possède une unique solution u_n.

2) Montrer qu'il existe des constantes positives M_1 et M_2 indépendantes de $n > 0$ telles que

$$\int_0^3 (u_n')^2 + \int_0^3 u_n^2 \leq M_1, \quad \forall n > 0$$

$$\int_0^1 u_n^2 + \int_2^3 u_n^2 \leq \frac{M_2}{n}, \quad \forall n > 0.$$

3) Vérifier qu'on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{\psi(n)})_n$ convergeant faiblement dans $H_0^1(]0,3[)$ vers une limite que l'on notera u^*.

Montrer que $u^* = 0$ sur $[0,1] \cup [2,3]$ et que, sur $]1,2[$, u^* est la solution d'un problème aux limites que l'on déterminera.

Vérifier que la suite entière $(u_n)_n$ converge faiblement vers u^* quand $n \to +\infty$.

Corrigé.

1) La formulation variationnelle à étudier est

$$\left\{\begin{array}{c} u_n \in H_0^1(]0,3[) \\ \\ \forall v \in H_0^1(]0,3[), \quad \int_0^3 u_n' v' + n\int_0^1 u_n v + n\int_2^3 u_n v = \int_1^2 fv. \end{array}\right. \tag{68}$$

L'espace $H_0^1(]0,3[)$ est un espace de Hilbert (cours).

L'application a est clairement bilinéaire. Pour tout $(u,v) \in H_0^1(]0,3[)^2$, on a

$$|a(u,v)| \leq \int_0^3 |u'|\ |v'| + n\int_0^1 |u|\ |v| + n\int_2^3 |u|\ |v|$$

d'où

$$|a(u,v)| \leq \int_0^3 |u'|\ |v'| + 2n\int_0^3 |u|\ |v|$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,3[)$ et comme $\|u\|_{L^2(]0,3[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,3[)}$, $\|u'\|_{L^2(]0,3[)} \leq \|u\|_{H^1(]0,3[)}$, et de même pour v, on a :

$$|a(u,v)| \leq (1+2n)\|u\|_{H^1(]0,3[)}\|v\|_{H^1(]0,3[)}$$

ce qui prouve la continuité de l'application bilinéaire. Pour la coercivité, on a :

$$\forall v \in H_0^1(]0,3[),\ a(v,v) = \int_0^3 (v')^2 + n\int_0^1 v^2 + n\int_2^3 v^2 \geq \int_0^3 (v')^2.$$

Par le corollaire de l'inégalité de Poincaré (cours), il existe une constante $c_1 > 0$ telle que :

$$\forall\ v \in H_0^1(]0,3[), \quad \|v'\|_{L^2(]0,3[)} \geq c_1\|v\|_{H^1(]0,3)}. \tag{69}$$

On a donc

$$\forall v \in H_0^1(]0,3[),\ a(v,v) \geq c_1^2\|v\|^2_{H^1(]0,3[))},$$

ce qui prouve la coercivité de a.

Finalement L est linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]1,2[)$ et l'inégalité $\|v\|_{L^2(]0,3[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,3[)}$, on a :

$$\forall v \in H_0^1(]0,3[),\ |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]1,2[)}\|v\|_{L^2(]1,2[)} \leq \|f\|_{L^2(]1,2[)}\|v\|_{L^2(]0,3[)} \leq \|f\|_{L^2(]1,2[)}\|v\|_{H^1(]0,3[)}$$

ce qui donne la continuité de L.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (**??**)

2) On prend $v = u_n$ dans (**??**). Cela donne

$$\forall n, \quad \int_0^3 (u_n')^2 + n\int_0^1 u_n^2 + n\int_2^3 u_n^2 = \int_1^2 fu_n.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit

$$\forall n, \quad \int_0^3 (u_n')^2 + n\int_0^1 u_n^2 + n\int_2^3 u_n^2 \le \|f\|_{L^2(]1,2[)}\|u_n\|_{L^2(]1,2[)} \le \|f\|_{L^2(]1,2[)}\|u_n\|_{L^2(]0,3[)} \quad (70)$$

L'inégalité de Poincaré dans $H_0^1(]0,3[)$ nous donne l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\forall\, v \in H_0^1(]0,3[), \quad \|v\|_{L^2(]0,3[)} \le c_2\|v'\|_{L^2(]0,3[)}. \quad (71)$$

On déduit donc de (**??**) que

$$\forall n, \quad \int_0^3 (u_n')^2 + n\int_0^1 u_n^2 + n\int_2^3 u_n^2 \le c_2\|f\|_{L^2(]1,2[)}\|u_n'\|_{L^2(]0,3[)} \quad (72)$$

Comme $n\int_0^1 u_n^2 + n\int_2^3 u_n^2 \ge 0$, (**??**) entraîne

$$\forall n, \quad \|u_n'\|^2_{L^2(]0,3[)} \le c_2\|f\|_{L^2(]1,2[)}\|u_n'\|_{L^2(]0,3[)}$$

d'où

$$\forall n, \quad \|u_n'\|_{L^2(]0,3[)} \le c_2\|f\|_{L^2(]1,2[)}$$

et par (**??**)

$$\forall n, \quad \|u_n\|_{H^1(]0,3[)} \le \frac{c_2}{c_1}\,\|f\|_{L^2(]1,2[)}. \quad (73)$$

On revient maintenant à (**??**). Comme $\int_0^3 (u_n')^2 \ge 0$, cette inégalité entraîne

$$\forall n, \quad n\int_0^1 u_n^2 + n\int_2^3 u_n^2 \le \|f\|_{L^2(]1,2[)}\|u_n'\|_{L^2(]0,3[)}$$

d'où en utilisant (**??**)

$$\forall n, \quad n\int_0^1 u_n^2 + n\int_2^3 u_n^2 \le \frac{c_2}{c_1}\,\|f\|^2_{L^2(]1,2[)}$$

d'où

$$\forall n, \quad \int_0^1 u_n^2 + \int_2^3 u_n^2 \le \frac{c_2\,\|f\|^2_{L^2(]1,2[)}}{c_1}\,\frac{1}{n} \quad (74)$$

3) Au vu de (**??**), la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(]0,3[)$ qui est un espace de Hilbert. On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergeante : il existe une sous-suite $(u_{\psi(n)})_n$ et il existe $u^* \in H_0^1(]0,3[)$ et $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans $H_0^1(]0,3[)$ faible. Pour tout n, $u_{\psi(n)}$ satisfait :

$$\forall v \in H_0^1(]0,3[), \quad \int_0^3 u_{\psi(n)}'v' + \psi(n)\int_0^1 u_{\psi(n)}v + \psi(n)\int_2^3 u_{\psi(n)}v = \int_1^2 fv. \quad (75)$$

Considérons l'application K de $H_0^1(]0,3[)$ dans $L^2(]0,1[)$ donnée par $K(v)$ = restriction de v à $]0,1[$. K est linéaire et continue puisque

$$\forall v \in H_0^1(]0,3[), \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|v\|_{L^2(]0,3[)} \leq \|v\|_{H^1(]0,3[)}.$$

Par la proposition 4.7 du cours, comme $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans $H_0^1(]0,3[)$ faible, on a $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(]0,1[)$ faible.
Par ailleurs, (**??**) avec n remplacé par $\psi(n)$ entraîne, comme $\int_2^3 u_{\psi(n)}^2 \geq 0$:

$$\|u_{\psi(n)}\|_{L^2(]0,1[)}^2 \leq \frac{c_2 \ \|f\|_{L^2(]1,2[)}^2}{c_1} \ \frac{1}{\psi(n)} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \tag{76}$$

Donc $u_{\psi(n)} \to \tilde{0}$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(]0,1[)$ fort, et donc aussi dans $L^2(]0,1[)$ faible. Par unicité de la limite dans $L^2(]0,1[)$ faible, on a $u^*(x) = 0$ pour presque tout $x \in]0,1[$. Comme u^* est continue sur $[0,1]$, on conclut que

$$u^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{77}$$

Au vu de (**??**), on peut faire exactement le même raisonnement sur $]2,3[$ et on obtient que

$$u^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [2,3]. \tag{78}$$

Intéressons-nous maintenant à ce qui se passe sur $]1,2[$. Soit $\phi \in C_c^\infty(]1,2[)$. Considérons $\tilde{\phi} :]0,3[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{\phi}(x) \ = \ \begin{cases} \phi(x) & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ et } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Alors $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(]0,3[) \subset H_0^1(]0,3[)$. On peut donc prendre $v = \tilde{\phi}$ dans (**??**). Cela donne :

$$\int_0^3 u'_{\psi(n)}\tilde{\phi}' + \psi(n)\int_0^1 u_{\psi(n)}\tilde{\phi} + \psi(n)\int_2^3 u_{\psi(n)}\tilde{\phi} = \int_1^2 f\tilde{\phi}. \tag{79}$$

Mais $\tilde{\phi}(x) = 0$ sur $[0,1] \cup [2,3]$ et $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$ sur $]1,2[$. Donc (**??**) devient

$$\int_1^2 u'_{\psi(n)}\phi' = \int_1^2 f\phi. \tag{80}$$

L'application linéaire $w \to \int_1^2 w'\phi'$ est continue de $H_0^1(]0,3[)$ dans $\mathbb{R}$ puisque pour tout $w \in H_0^1(]0,3[)$:

$$|\int_1^2 w'\phi'| \leq \|w'\|_{L^2(]1,2[)}\|\phi'\|_{L^2(]1,2[)} \leq \|\phi'\|_{L^2(]1,2[)}\|w\|_{L^2(]0,3[)} \leq \|\phi'\|_{L^2(]1,2[)}\|w\|_{H^1(]0,3[)}.$$

Comme $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u^*$ quand $n \to +\infty$ dans $H_0^1(]0,3[)$ faible, on en déduit que

$$\int_1^2 u'_{\psi(n)}\phi' \to \int_1^2 (u^*)'\phi' \text{ quand } n \to +\infty.$$

On peut donc passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans (**??**), ce qui donne :

$$\int_1^2 (u^*)'\phi' = \int_1^2 f\phi. \tag{81}$$

Ici $\phi \in C_c^\infty(]1,2[)$ est quelconque. Comme $(u^*)' \in L^2(]1,2[)$ et $f \in L^2(]1,2[)$, on a $(u^*)' \in H^1(]1,2[)$ et $((u^*)')' = -f$. D'où $u^* \in H^2(]1,2[)$ et

$$u^* \in H^2(]1,2[) \quad -(u^*)'' = f \text{ dans } L^2(]1,2[). \tag{82}$$

En ce qui concerne les conditions au limites, on déduit de (**??**) et (**??**) que $u^*(1) = 0$ et $u^*(2) = 0$.

u^* vérifie donc

$$\begin{cases} u^* \in H^2(]1,2[), \quad -(u^*)'' = f \text{ dans } L^2(]1,2[), \\ \\ u^*(1) = 0, \quad u^*(2) = 0. \end{cases} \tag{83}$$

Montrons que que la suite entière u_n converge vers u^* quand $n \to +\infty$ dans $H_0^1(]0,3[)$ faible. La suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(]0,3[)$ qui est séparable (car sous-espace fermé d'un espace séparable). Elle appartient donc à un compact pour la topologie faible.
Montrons qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit $l \in H_0^1(]0,3[)$ une valeur d'adhérence. Il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})_n$ telle que $u_{\phi(n)} \rightharpoonup l$ quand $n \to +\infty$ dans $H_0^1(]0,3[)$ faible. Exactement comme ci-dessus pour la suite $(u_{\psi(n)})_n$, on montre que

$$l(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,1] \cup [2,3].$$

Aussi on prouve que l est solution de (**??**). Montrons que (**??**) possède une unique solution. Soit $v \in H_0^1(]1,2[)$. En multipliant l'équation (**??**) par v et intégrant sur $]1,2[$, on obtient

$$-\int_1^2 (u^*)''v' = \int_1^2 fv. \tag{84}$$

Comme $u^* \in H^2(]1,2[)$ et $v \in H^1(]1,2[)$, on peut intégrer par partie dans (**??**), ce qui donne

$$\int_1^2 (u^*)'v' - (u^*)'(2)v(2) + (u^*)'(1)v(1) = \int_1^2 fv.$$

et comme $v \in H_0^1(]1,2[)$:

$$\int_1^2 (u^*)'v' = \int_1^2 fv.$$

Remarque : On peut aussi obtenir ce résultat en raisonnant par densité et continuité à partir de (**??**). u^* est donc solution de

$$\left\{ \begin{array}{c} u^* \in H_0^1(]1,2[), \\ \\ \forall v \in H_0^1(]1,2[), \quad \int_1^2 (u^*)'v' = \int_1^2 fv. \end{array} \right. \tag{85}$$

On vérifie qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à (**??**) **(fait dans l'exercice ?? que je ne ré-écris pas)**. La solution du problème (**??**) est donc unique.
La valeur d'adhérence $l(x)$ est donc uniquement déterminée sur $[0,1]$, $[2,3]$, et $[1,2]$, et égale à u^*.
La suite $(u_n)_n$ appartenant à un compact et ayant une unique valeur d'adhérence, on a que $u_n \rightharpoonup u^*$ dans $H_0^1(]0,3[)$ faible quand $n \to +\infty$.

□

Optimisation

Exercice 28. Soit $E = H^1(]0,1[)$. Etudier la différentiabilité de

$$J(u) = \int_0^1 u(x)^3 dx.$$

Corrigé. On a

$$J(u+v) = \int_0^1 (u+v)^3 = \int_0^1 u^3 + 3\int_0^1 u^2 v + 3\int_0^1 uv^2 + \int_0^1 v^3. \tag{86}$$

Le second terme dans (**??**) est linéaire par rapport à v et continu car u^2 est continue sur $[0,1]$, donc de carré intégrable sur $[0,1]$ (écrire les majorations déjà souvent faites).
On pose

$$\epsilon(v) = 3\int_0^1 uv^2 + \int_0^1 v^3. \tag{87}$$

On a

$$|\epsilon(v)| \leq 3\|u\|_{L^\infty(]0,1[)}\|v\|^2_{L^\infty(]0,1[)} + \|v\|^3_{L^\infty(]0,1[)} \tag{88}$$

Par l'injection continue de Sobolev $H^1(0,1[) \hookrightarrow L^\infty(]0,1)$, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(0,1[)$, on a

$$\|v\|_{L^\infty(]0,1[)} \leq c_1\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

On déduit donc de (**??**) que

$$|\epsilon(v)| \leq 3c_1^2\|u\|_{L^\infty(]0,1[)}\|v\|^2_{H^1(]0,1[)} + c_1^3\|v\|^3_{H^1(]0,1[)}$$

D'où en revenant à (??)

$$\frac{|\epsilon(v)|}{\|v\|_{H^1(]0,1[)}} \leq 3c_1^2\|u\|_{L^\infty(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} + c_1^3\|v\|^2_{H^1(]0,1[)} \to 0 \text{ quand } \|v\|_{H^1(]0,1[)} \to +\infty$$

□

Exercice 29. Soit $f \in L^2(]0,1[)$.
1) Vérifier que

$$K = \{v \in H^1(]0,1[),\ v(0) \geq 0\ , v(1) \geq 0\}$$

est un cône convexe fermé de sommet 0.
2) On considère

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\ v'(x)^2 + v(x)^2\ ]dx - \int_0^1 f(x)v(x)\ dx. \tag{89}$$

Vérifier qu'il existe $u \in K$ unique tel que $J(u) = \inf_{v\in K} J(v)$.
3) Montrer que u vérifie :

$$\begin{cases} u \in K, \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx - \int_0^1 f(x)v(x)\ dx \geq 0, \quad \forall v \in K \\ \int_0^1 u'(x)^2dx + \int_0^1 u(x)^2dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx = 0. \end{cases}$$

Est-ce que ce problème admet une unique solution ?
4) Montrer que $u \in H^2(]0,1[)$ et vérifie

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } L^2(]0,1[), \\ u(0) \geq 0\ , u'(0) \leq 0,\ u(0)u'(0) = 0 \\ u(1) \geq 0\ , u'(1) \geq 0,\ u(1)u'(1) = 0. \end{cases}$$

Corrigé.

1) K est bien convexe car pour tout $(u,v) \in K^2$ et $t \in [0,1]$, comme $u(0) \geq 0$, $u(1) \geq 0$, $v(0) \geq 0$ et $v(1) \geq 0$, on a

$$tu(0) + (1-t)v(0) \geq 0 \text{ et } tu(1) + (1-t)v(1) \geq 0,$$

d'où $tu + (1-t)v \in K$. De plus si λ est un réel positif et $v \in K$, alors $\lambda v \in K$ puisque $\lambda v(0) \geq 0$ et $\lambda v(1) \geq 0$.

Il reste à montrer que K est fermé. Soit $(v_n)_n$ une suite de K telle qu'il existe $v \in H^1(]0,1[)$ et $v_n \to v$ quand $n \to +\infty$ dans $H^1(]0,1[)$. Alors, par le cours, $v_n(0) \to v(0)$ et $v_n(1) \to$

$v(1)$ quand $n \to +\infty$. Les inégalités, $\forall n$, $v_n(0) \geq 0$, $v_n(1) \geq 0$ entraînent donc $v(0) \geq 0$ et $v(1) \geq 0$ par passage à la limite, et donc $v \in K$.

2) L'espace $H^1(]0,1[)$ est un espace de Hilbert (cours). Introduisons

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x).$$

Alors $(u,v) \to a(u,v)$ est le produit scalaire dans $H^1(]0,1[)$ donc a est bilinéaire, continue, coercive et *symétrique* (ou alors on reprend les arguments classiques déjà faits dans beaucoup d'exercices). De plus L est linéaire continue (déjà fait dans beaucoup d'exercices). Enfin on a vu dans la question 1, que K est convexe fermé non vide ($0 \in K$). De plus J donnée par (**??**) s'écrit

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

Le résultat du cours sur les fonctionnelles quadratiques s'applique donc et il existe $u \in K$ unique tel que $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$.

3) D'après le résultat du cours sur les fonctionnelles quadratiques, comme K est un cône convexe fermé de sommet 0, u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K \\ \forall v \in K, \ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv - \int_0^1 fv \geq 0 \\ \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 u^2 - \int_0^1 fu = 0. \end{cases} \tag{90}$$

Comme (**??**) est équivalent au problème d'optimisation car K et J sont convexes, et que le problème d'optimisation possède une unique solution, (**??**) possède une unique solution.

4) On note que si $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ alors $\phi \in K$ car $\phi(0) = \phi(1) = 0$. On peut donc prendre $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$ dans l'inégalité de (**??**), ce qui donne :

$$\int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 u\phi - \int_0^1 f\phi \geq 0$$

Mais on a aussi $-\phi \in K$ de sorte que

$$\int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 u\phi - \int_0^1 f\phi \leq 0$$

d'où finalement

$$\int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 u\phi - \int_0^1 f\phi = 0$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$. Ici comme $u' \in L^2(]0,1[)$ et $u - f \in L^2(]0,1[)$, on obtient que $u' \in H^1(]0,1[)$ et et $(u')' = u - f$. D'où, comme $u \in H^1(]0,1[)$, $u \in H^2(]0,1[)$ et

$$-u'' + u = f \text{ dans } L^2(]0,1[). \tag{91}$$

Il reste à déterminer des conditions aux bornes de l'intervalle. Comme $u \in K$, on a $u(0) \geq 0$ et $u(1) \geq 0$. Soit $v \in K$ quelconque. Comme $u \in H^2(]0,1[)$, on peut intégrer par partie le premier terme dans l'inégalité de (**??**), ce qui donne :

$$\forall v \in K, \int_0^1 [-u'' + u - f]\, v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) \geq 0$$

et en utilisant (**??**)

$$\forall v \in K,\ u'(1)v(1) - u'(0)v(0) \geq 0. \tag{92}$$

Pour $v(x) = x$ qui appartient à K, (**??**) donne

$$u'(1) \geq 0 \tag{93}$$

et pour $v(x) = 1 - x$ qui appartient aussi à K,

$$u'(0) \leq 0. \tag{94}$$

0n peut aussi faire une intégration par partie dans l'égalité de (**??**), ce qui donne :

$$u'(1)u(1) = u'(0)u(0).$$

Au vu de (**??**) et (**??**), on a

$$u'(1)u(1) \geq 0,\ u'(0)u(0) \leq 0$$

d'où

$$u'(1)u(1) = u'(0)u(0) = 0.$$

□

Exercice 30. Soit $f \in L^2(]0,1[)$. Pour $v \in H_0^1(]0,1[)$ on définit

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 v(x)^4 dx - \int_0^1 f(x)v(x)\, dx.$$

1) Vérifier que J est strictement convexe sur $H_0^1(]0,1[)$.

2) Montrer que, dans $H_0^1(]0,1[)$, on a $\lim_{\|v\|_{H^1} \to +\infty} J(v) = +\infty$.

3) Montrer que J est différentiable sur $H_0^1(]0,1[)$ et déterminer sa différentielle.

4) Vérifier qu'il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ unique tel que $J(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v)$.

5) Montrer que u vérifie :

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)^3 v(x)dx - \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0.$$

6) Montrer que $u \in H^2(]0,1[)$ et vérifie

$$\begin{cases} -u'' + u^3 = f \text{ dans } L^2(]0,1[) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Est-ce que ce problème admet une unique solution ?

Corrigé.

1) On écrit

$$J(v) = J^1(v) + J^2(v) + J^3(v)$$

avec

$$J^1(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2, \quad J^2(v) = \frac{1}{4}\int_0^1 v^4, \quad J^3(v) = -\int_0^1 fv.$$

Soit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Alors $J^1(v) = \frac{1}{2}a(v,v)$ et a est bilinéaire, continue, coercive et symétrique sur $H_0^1(]0,1[)^2$(on reprend des arguments déjà faits dans d'autres exercices). En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \ a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(]0,1[)}. \tag{95}$$

Par le cours, J^1 est donc strictement convexe sur $H_0^1(]0,1[)$.

Ensuite J^2 s'écrit

$$J^2(v) = \int_0^1 g(v(x))dx, \text{ avec } g(s) = \frac{s^4}{4}.$$

On a $g''(s) = 3s^2 \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc g est convexe. Il en résulte que J^2 est convexe.

Enfin J^3 est linéaire donc convexe.

La fonctionnelle J, somme d'une fonctionnelle strictement convexe et de deux fonctionnelles convexes, est donc strictement convexe.

2) On remarque que, pour tout v dans $H_0^1(]0,1[)$, on a $J^2(v) \geq 0$. Il en résulte que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad J(v) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2 dx - \int_0^1 f(x)v(x)\, dx.$$

Grâce à (**??**)

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad J(v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(]0,1[)} - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Ensuite grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(]0,1[)$:

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ |\int_0^1 f(x)v(x)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}$$

On en déduit

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad J(v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(]0,1[)} - \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

D'où

$$J(v) \to +\infty \text{ quand } \|v\|_{H^1(]0,1[)} \to +\infty, \text{ avec } v \in H_0^1(]0,1[).$$

3) Par le cours, comme a est bilinéaire, symétrique et continue, J^1 est différentiable et

$$DJ_u^1(v) = \int_0^1 u'v'.$$

Comme g est de classe C^2, J^2 est différentiable et

$$DJ_u^2(v) = \int_0^1 u^3 v.$$

Enfin, comme J^3 est linéaire continue, J^3 est différentiable et

$$DJ_u^3(v) = -\int_0^1 fv.$$

La fonctionnelle J est donc différentiable et

$$DJ_u(v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv.$$

4) $H_0^1(]0,1[)$ est un espace de Hilbert. La fonctionnelle J est continue (car différentiable) et strictement convexe. Enfin, dans $H_0^1(]0,1[)$, on a $\lim_{\|v\|_{H^1(]0,1[)}\to+\infty} J(v) = +\infty$. Le théorème du cours garantit que J possède un unique point de minimum global sur $H_0^1(]0,1[)$ que l'on note u.

5) Comme J est convexe, u est point de minimum global de J sur H si et seulement si l'équation d'Euler est satisfaite, c'est-à-dire si et seulement si $DJ_u = 0$ ce qui donne ici :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in H_0^1(]0,1[) \\ \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 u^3 v - \int_0^1 fv = 0. \end{array} \right. \tag{96}$$

6) On peut prendre $\phi \in C_c^\infty(]0,1[) \subset H_0^1(]0,1[)$ dans (**??**). Cela donne :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[), \ \int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 u^3\phi - \int_0^1 f\phi = 0.$$

ou

$$\forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[), \ \int_0^1 u'\phi' = \int_0^1 \left[f - u^3\right]\phi = 0.$$

Ici $u' \in L^2(]0,1[)$. Aussi $f \in L^2(]0,1[)$ et $u^3 \in C([0,1])$ donc $u^3 \in L^2(]0,1[)$. Par définition de $H^1(]0,1[)$, on en déduit que $u' \in H^1(]0,1[)$ et et $(u')' = u^3 - f$. D'où, comme $u \in H^1(]0,1[)$, $u \in H^2(]0,1[)$ et

$$-u'' + u^3 = f \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

Enfin $u \in H_0^1(]0,1[)$, donc $u(0) = u(1) = 0$. u est donc solution du problème aux limites

$$\begin{cases} u \in H^2(]0,1[) \bigcap H_0^1(]0,1[), \\ \\ -u'' + u^3 = f \text{ dans } L^2(]0,1[). \end{cases} \tag{97}$$

On a donc montré que si u satisfait (**??**), alors u satisfait (**??**). Montrons que la réciproque est vraie. Soit u solution de (**??**). On peut multiplier l'équation par $v \in H_0^1(]0,1[)$ et intégrer sur $]0,1[$. On obtient

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 fv \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

Comme $u \in H^2(]0,1[)$ et $v \in H^1(]0,1[)$, on peut intégrer par partie, ce qui donne

$$\int_0^1 u'v' - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 fv \text{ dans } L^2(]0,1[).$$

et donc (**??**) comme $v(1) = v(0) = 0$.
Les problèmes (**??**) et (**??**) sont donc équivalents. On a déjà noté que (**??**) est équivalent au problème de minimisation

$$\begin{cases} u \in H_0^1(]0,1[) \\ J(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v) \end{cases}$$

qui possède une unique solution par la question 4. Donc (**??**) possède une unique solution.

$\square$

Exercice 31. Soit $f \in L^2(]0,1[)$. Pour $v \in H_0^1(]0,1[)$ on définit

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2 dx + \frac{1}{6}\int_0^1 v(x)^6 dx - \frac{1}{4}\int_0^1 v(x)^4 dx - \int_0^1 f(x)v(x)\, dx.$$

1) Montrer que, dans $H_0^1(]0,1[)$, on a $\lim_{\|v\|_{H^1}\to+\infty} J(v) = +\infty$.

2) Montrer que J est continue sur $H_0^1(]0,1[)$.

3) Vérifier qu'il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $J(u) = \min_{v\in H_0^1(]0,1[)} J(v)$.

Indication : On pourra considérer une suite (u_n) de $H_0^1(]0,1[)$ telle que

$$J(u_n) \to \inf_{v\in H_0^1(]0,1[)} J(v).$$

a) Vérifier que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(]0,1[)$. En extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers u dans $H_0^1(]0,1[)$ faible.
b) Montrer que $J(u) \leq \liminf_n J(u_{\varphi(n)})$; on pourra introduire

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2 dx + \frac{1}{6}\int_0^1 v(x)^6 dx - \int_0^1 f(x)v(x)\, dx$$

et

$$J_2(v) = -\frac{1}{4}\int_0^1 v(x)^4 dx.$$

On admettra que, si une suite $(v_n)_n$ converge vers v dans $H^1(]0,1[)$ faible, alors $(v_n)_n$ converge vers v dans $L^4(]0,1[)$ fort

4) Quel est le problème aux limites vérifié par u ?

Corrigé.
1) On écrit

$$J(v) = J^1(v) + J^2(v) + J^3(v)$$

avec

$$J^1(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2,\ \ J^2(v) = \frac{1}{6}\int_0^1 v^6 - \frac{1}{4}\int_0^1 v^4,\ \ J^3(v) = -\int_0^1 fv.$$

Soit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Alors $J^1(v) = \frac{1}{2}a(u,v)$ et a est bilinéaire, continue, coercive sur $H_0^1(]0,1[)^2$(on reprend des arguments déjà faits dans d'autres exercices). En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(]0,1[)}. \tag{98}$$

Ensuite J^2 s'écrit

$$J^2(v) = \int_0^1 g(v(x))dx, \text{ avec } g(s) = \frac{s^6}{6} - \frac{s^4}{4}.$$

Comme $g(s) \to +\infty$ quand $s \to \pm\infty$ et que g est continue, g est minorée sur $\mathbb{R}$

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \ \forall s \in \mathbb{R}, \ g(s) \geq \beta$$

ce qui entraîne

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \ J^2(v) \geq \beta$$

On en conclut que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad J(v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(]0,1[)} + \beta - \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}. \tag{99}$$

D'où

$$J(v) \to +\infty \text{ quand } \|v\|_{H^1(]0,1[)} \to +\infty, \text{ avec } v \in H_0^1(]0,1[).$$

2) On a

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(]0,1[)} + \frac{1}{6}\|v\|^6_{L^6(]0,1[)} - \frac{1}{4}\|v\|^4_{L^4(]0,1[)} - \int_0^1 fv. \tag{100}$$

Les différentes normes dans (**??**) dépendent continûment de v dans $H_0^1(]0,1[)$ car l'application $v \to v'$ est continue de $H_0^1(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$ et

$$H_0^1(]0,1[) \hookrightarrow L^\infty(]0,1[) \hookrightarrow L^6(]0,1[) \hookrightarrow L^4(]0,1[)$$

(injections continues). Ceci entraîne la continuité de J par composition d'applications continues.

3) On peut noter que l'inégalité (**??**) entraîne que J est minorée sur $H_0^1(]0,1[)$, donc $\inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v) = d \in \mathbb{R}$.
Pour tout n il existe $u_n \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $d \leq J(u_n) < d + \frac{1}{n}$. La suite $(u_n)_n$ ainsi définie vérifie :

$$J(u_n) \to d = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v) \in \mathbb{R} \text{ quand } n \to +\infty. \tag{101}$$

On note que $J(0) = 0$ et $\inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v) \leq 0$. Comme, dans $H_0^1(]0,1[)$, $\lim_{\|v\|_{H^1} \to +\infty} J(v) = +\infty$, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[) \text{ tels que } \|v\|_{H^1(]0,1[)} > R, \text{ on a } J(v) > 1.$$

Alors (**??**) entraîne que $J(u_n) \to d \leq 0$ donc $\|u_n\|_{H^1(]0,1[)} \leq R$ pour n assez grand.la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(]0,1[)$ (démonstration similaire au cours).
On peut donc en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergeant faiblement vers $u \in H_0^1(]0,1[)$.

Introduisons

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2dx + \frac{1}{6}\int_0^1 v(x)^6dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

et

$$J_2(v) = -\frac{1}{4}\int_0^1 v(x)^4dx.$$

Alors J_1 est convexe continue (analogue à l'exercice **??**). Donc par le cours

$$J_1(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J_1(u_{\varphi(n)}) \tag{102}$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge fortement vers u dans $L^4(]0,1[)$ (l'injection de $H_0^1(]0,1[)$ dans $L^4(]0,1[)$ est compacte). Il en résulte que

$$J_2(u_{\varphi(n)}) = -\frac{1}{4}\|u_{\varphi(n)}\|^4_{L^4(]0,1[)} \to -\frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4(]0,1[)} = J_2(u) \text{ quand } n\to+\infty \tag{103}$$

On déduit de (**??**) et (**??**) que

$$J(u) = J_1(u) + J_2(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J_1(u_{\varphi(n)}) + \lim_{n\to+\infty} J_2(u_{\varphi(n)}) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\varphi(n)}) \tag{104}$$

Comme, par (**??**), $J(u_{\varphi(n)})) \to \inf_{v\in H_0^1(]0,1[)} J(v)$, on conclut que

$$J(u) \leq \inf_{v\in H_0^1(]0,1[)} J(v) \tag{105}$$

Donc $u \in H_0^1(]0,1[)$ est un point de minimum global de J sur $H_0^1(]0,1[)$.

4) Analogue à l'exercice **??**. Le minimum global u vérifie $DJ_u = 0$

$$\left\{\begin{array}{c} u \in H^2(]0,1[)\bigcap H_0^1(]0,1[), \\ \\ -u'' + u^5 - u^3 = f \text{ dans } L^2(]0,1[). \end{array}\right. \tag{106}$$

mais la solution de ce problème n'est pas a priori unique.

□