Outils mathématiques avancés pour l'analyse des EDP

Laurent Seppecher

Cours d'approfondissement S7

Version du 19 décembre 2023

Ce cours de debut de deuxième année d'école d'ingénieur est un condensé des éléments théoriques utiles à la poursuite des études en mathématiques appliquées, notamment en vue d'un éventuel master dans ce domaine. Il est nécessairement assez dense. Les chapitres I, II, et III, ainsi que le chapitre IV font en général l'objet de cours entiers de licence 3. De même les chapitres V, VI, VII et VIII forment généralement un cours master 1. Par conséquent, certains éléments sont abordés rapidement ici et le lecteur est invité à approfondir les notions présentées. On peut citer les ouvrages suivants :

- [Rolland] *Théorie de la mesure et de l'intégration* , 2017, Robert Rolland.
- [Girardin-Limnios] *Probabilités en vue des applications*, tomes I et II, Vuibert 2008. Valérie Girardin et Nikolaos Limnios.
- [Brézis] *Analyse fonctionnelle*, Dunod 2005. Haïm Brézis.

Ce cours demande de solides bases sur les notions de premier cycle suivantes : théorie des ensembles, analyse réelle, topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$, Algèbre linéaire.

Table des matières

Chapitre 1

Théorie de la mesure

Sommaire

La théorie de la mesure est la théorie fondamentale à la base de l'analyse et des probabilité. Elle permet notamment de définir mathématiquement les notions d'intégrale, de probabilité, d'espérance, de variance, etc.. dans un cadre très général. Elle se construit à partir de la théorie des ensembles.

Cette théorie permet de donner un sens mathématique à l'idée de « taille »des parties d'un ensemble. On peut penser au cardinal par exemple qui consiste à compter les éléments de chaque partie, ou bien à la notion de longueur pour les intervalles de $\mathbb{R}$, ou bien encore aux notions de surface ou de volume de certaines parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On pense également à la notion de probabilité d'un événement.

Dans ce chapitre, Ω désigne un ensemble non vide. $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω. Pour $A \in \mathcal{P}(A)$, on note A^c son complémentaire dans Ω. On note aussi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

I Mesures

Pour définir la notion de mesure positive (mesure en abrégé) de certaines parties d'un ensemble, on cherche à construire une fonction

$$\mu : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}^+} \tag{1.1}$$

qui vérifie certaines propriétés fondamentales et intuitives. On souhaite par exemple que si $\emptyset \subset \mathcal{A}$ on ait

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{1.2}$$

On souhaite également que la propriété d'additivité soit vérifiée. On dit qu'une telle fonction μ est **additive** si pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cup B \in \mathcal{A}$ alors

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \qquad \textbf{(additivité)}.$$

Cependant, cette dernière propriété est trop faible pour un usage interessant de la fonction μ. On souhaite en plus pouvoir passer à la limite sur une suite de parties disjointes de $\mathcal{A}$.

Définition 1.1 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω. On dit que c'est une **suite de parties disjointes** si

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad m \neq n \quad \Rightarrow \quad A_m \cap A_n = \emptyset.$$

Exemple : La suite $\left(\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right[\right)_{n\in\mathbb{N}}$, les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

On définit de manière générale, une mesure positive comme suit.

Définition 1.2 Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\emptyset \in \mathcal{A}$. On appelle **mesure positive** sur $\mathcal{A}$ toute application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties disjointes de $\mathcal{A}$, si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \qquad (\sigma\textbf{-additivité}).$$

Exemple : (Mesure de comptage) On définit $\mu(A) = \text{card}(A)$. C'est une mesure définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple :(Mesure de Dirac) Soit $x_0 \in \Omega$. La mesure de Dirac en x_0 est définie par : ,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_0 \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

C'est une mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$: En effet, $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles disjoints alors $x_0 \in \cup_n A_n$ si et seulement si x_0 est dans l'un des A_n et comme ils sont disjoints, x_0 ne peut appartenir qu'à un seul A_n. Autrement dit $\delta_{x_0}(\cup_n A_n) = 1$ si $\sum_n \delta_{x_0}(A_n) = 1$, et l'autre valeur possible est 0.

Exemple : (Mesures discrètes) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors la fonction, définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \delta_{x_k}$ est une mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple : (Longueur des intervalles) On note $\mathcal{I} := \left\{]a, b[,]a, b], [a, b[, [a, b] \mid a, b \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. Alors l'application μ définie par $\mu(]a, b[) = \mu(]a, b]) = \mu([a, b[) = \mu([a, b]) = b - a$ est une mesure sur $\mathcal{I}$.

Exemple : (Aire des rectangles) On note $\mathcal{R}$ l'ensemble de tout les rectangles de $\mathbb{R}^2$. Alors l'application qui à tout $R \in \mathcal{R}$ associe son aire est une mesure sur $\mathcal{R}$.

La σ-additivité permet de passer à la limite sur des unions dénombrable disjointes, permettant par exemple de définir la surface d'un disque comme la somme des surfaces de carrés de taille arbitrairement petite.

Aux deux propriétés fondamentales qui définissent une mesure, on ajoute, en fonction des besoins, des propriétés supplémentaires que l'on souhaite que μ vérifie. Par exemple si l'on veut définir la notion de longueur sur $\mathbb{R}$, on pourra demander que $\mu([a, b]) = b - a$, ou encore si l'on souhaite définir la notion de probabilité sur Ω, on demandera que $\mu(\Omega) = 1$.

II Tribus et espaces mesurables

Idéalement, une mesure permettrait de mesurer toutes les parties de Ω. On aurait alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. En général, on n'y parvient pas. C'est-à-dire que dans certains cas, les propriétés que l'on impose à la mesure sont trop contraignantes pour qu'elle puisse être définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier. C'est le cas en particulier de la fameuse mesure de Lebesgue. On cherche alors un ensemble de parties (grand si possible) sur lequel notre mesure peut être définie. On introduit pour cela la notion de tribu.

On définit d'abord une première structure élémentaire sur un ensemble de parties appelé algèbre de parties.

Définition 1.3 Une ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω est appelée **algèbre de parties** (ou **clan**) si

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (stabilité par union finie).

Exemple : $\{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$, $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Exemple : Les unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ et les unions finies de pavés de $\mathbb{R}^d$ sont des algèbres de parties.

En général, les algèbres de parties ne sont pas stable par union dénombrable. Si l'on impose cette condition supplémentaire, la structure est plus complexe et moins intuitive.

Définition 1.4 Une ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω est appelée **tribu** (ou **σ-algèbre**) sur Ω si

- $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$,
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par union dénombrable).

Définition 1.5

- Un ensemble non vide Ω muni d'une tribu $\mathcal{F}$ s'appelle **espace mesurable** et se note $(\Omega, \mathcal{F})$.
- Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une mesure positive μ définie sur $\mathcal{F}$ s'appelle **espace mesuré** et se note $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Remarque : Les algèbres de parties et les tribus contiennent Ω.

Définition 1.6 Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus sur Ω. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ (c'est-à-dire lorsque $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{G}$), on dit que $\mathcal{G}$ **plus fine** (ou plus grande) que $\mathcal{F}$ ou que $\mathcal{F}$ est **plus grossière** (ou plus petite) que $\mathcal{G}$.

Exemple : La famille $\mathcal{P}(\Omega)$ est la plus fine tribu possible. C'est la **tribu des parties de** Ω. c'est la plus fine : si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (elle comprend toutes les tribus sur Ω).

Exemple : La famille $\{\emptyset, \Omega\}$ est la **tribu triviale sur** Ω, dite la plus grossière : si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω alors $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}$ (elle est incluse dans toutes les tribus sur Ω).

Exemple : Si $A \subset \Omega$ est strict (i.e. $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$), alors $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^{\mathrm{c}}, \Omega\}$ est une tribu. C'est la plus petite tribu contenant A.

Proposition 1.7 (*Stabilité par intersection*)

1. *Toute algèbre de parties est stable par intersections finies.*
2. *Toute tribu est stable par intersections dénombrables.*

Preuve : On remarque que pour tout $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}}$ on déduit facilement la proposition. □

Proposition 1.8 (*Intersection de tribus*)

L'intersection quelconque de tribus est une tribu.

Preuve : Exercice. □

III Tribus engendrées

Définition 1.9 Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide de parties de Ω. On appelle **tribu engendrée par** $\mathcal{C}$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$. On la note $\sigma(\mathcal{C})$.

Proposition 1.10

Toute tribu qui contient $\mathcal{C}$ contient $\sigma(\mathcal{C})$. Par conséquent, pour tout $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}).$$

Preuve : D'après la définition. □

Exemple : Si $A \subset \Omega$ est non vide et différent de Ω, alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Remarque : L'ensemble des tribus contenant $\mathcal{C}$ est non vide car contient $\mathcal{P}(\Omega)$. De plus, l'intersection des tribus contenant $\mathcal{C}$ est bien une tribu par la proposition précédente.

Proposition 1.11 (*Une tribu engendrée est minimale*)

La tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.

Preuve : On a vu que c'est bien une tribu. Elle contient $\mathcal{C}$ puisque si $C \in \mathcal{C}$, C est dans toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ et donc dans leur intersection. Enfin c'est la plus petite par construction puisqu'elle est incluse dans toutes les autres. □

Définition 1.12 On dit qu'une suite $\mathcal{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de Ω est une **partition dénombrable** de Ω si

1. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tout $n \neq m$,
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Si l'on a un suite quelconque de parties, on peut toujours définir une partition de sa réunion grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.13 (*Sous-partition d'une suite de parties*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de parties. Il existe un

Exemple : La suite $\left(\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right[\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de $]0,1[$. La suite $([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition dénombrable de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.14 (*Tribu engendrée par une partition dénombrable*)

Soit Ω un ensemble non vide et soit $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partition dénombrable de Ω. Alors la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \,\middle|\, I \subset \mathbb{N} \right\}.$$

Preuve : On pose $\mathcal{F} = \left\{\bigcup_{i\in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N}\right\}$. Soit $I \subset \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{i\in I} A_i \in \sigma(\mathcal{A})$ par stabilité par union dénombrable. Donc $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{A})$. D'autre part, on vérifie que $\mathcal{F}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$. Comme $\sigma(\mathcal{A})$ est minimale, on a $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$. $\square$

Exemple : Si $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ partition, alors

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, \Omega\}.$$

Exemple : On essaye toujours de se ramener à une partition. Par exemple,

$$\sigma(\{A, B\}) = \sigma(\{A \backslash B, B \backslash A, A \cap B, (A \cup B)^{\mathrm{c}}\}).$$

Définition 1.15

- On appelle **tribu borélienne sur** $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. Les éléments de la tribu borélienne s'appellent les **parties boréliennes** ou les boréliens de $\mathbb{R}$.
- On appelle **tribu borélienne sur** $\mathbb{R}^d$ et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ la tribu engendrée par l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^d$. Les éléments de la tribu borélienne s'appellent les **parties boréliennes** ou les boréliens de $\mathbb{R}^d$

Exemple : Les singletons, les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, les ouverts, les fermés, toutes les opérations ensemblistes dénombrables sur les ouverts, les fermés sont des boréliens de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.16 (***Générateurs de la tribu borélienne***)

Sur $\mathbb{R}^d$, la tribu borélienne contient et est engendrée par chacune des familles suivantes :

- *les ouverts de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{R}^d$),*
- *les fermés de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{R}^d$),*
- *les intervalles (resp. pavés) à bornes dans $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}^n$), qui forment une famille dénombrable.*

Dans le cas particulier de $\mathbb{R}$, on peut aussi montrer que la tribu borélienne est engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{Q}$).

Preuve : Exercice. □

IV Propriétés des mesures

Dans la suite de ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Définition 1.17 On dit que la mesure μ est

- **finie** si $\mu(\Omega) < +\infty$,
- **σ-finie** si Ω admet une partition dénombrable (A_n) telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n.

*Exemple :*1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, alors

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n$$

est une mesure finie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. 2. La fonction $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$ est une mesure non finie mais σ-finie sur $\mathbb{N}$. En revanche, $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$ n'est pas σ-finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Proposition 1.18 (***Propriétés élémentaires***)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ une espace mesuré, $A, B \in \mathcal{F}$.

1. *$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ et $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ si $\mu(A) < +\infty$.*
2. *Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.*
3. *Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$,*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad (\sigma - \textit{sous-additivité})$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 1.19 (***Opération sur les mesures***)

Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} t_n \mu_n$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Si de plus, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ est est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Preuve : Exercice. $\square$

Proposition 1.20

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Preuve : Exercice. $\square$

Proposition 1.21 (*CNS de σ-additivité*)

Soit μ une application sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors μ est σ-additive si et seulement si

1. *μ est additive, i.e. si $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\forall\ A,\ B \in \mathcal{F}$ disjoints,*
2. *μ est σ-sous-additive.*

Preuve : Le sens direct est évident. Pour le sens réciproque, on considère un suite de parties disjointes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)$$

par additivité et par récurrence. Si pour un A_n on a $\mu(A_n) = +\infty$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty$ et la σ-additivité est vérifiée. Sinon pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \geq \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)$$

et en passant à la limite, quand $N \to \infty$ on en conclut que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

$\square$

Le résultat suivant est fondamental dans la théorie de la mesure.

Théorème 1.22 (*Extension de Carathéodory*)

Soit μ une mesure sur une algèbre de parties $\mathcal{A}$ sur Ω. Alors μ admet un prolongement qui est une mesure sur $\sigma(\mathcal{A})$. Si de plus μ est σ-finie alors le prolongement est unique.

Preuve : Voir DM 1. $\square$

V Mesures boréliennes, et mesure de Lebesgue

Définition 1.23 Une mesure définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est appelée **mesure borélienne**.

L'exemple le plus important de mesure borélienne est la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.24 (*Mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$)

Il existe un unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ notée λ telle que pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leq b$ on a

$$\lambda(]a, b[) = b - a.$$

De plus λ est invariante par translation. Cette mesure est appelée **mesure de Lebesgue** *sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : Sur l'ensemble $\mathcal{I}$ des intervalles on définit l'application λ par $\lambda(]a, b[) = b - a$. On vérifie que c'est une mesure sur $\mathcal{I}$. Sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des unions finies d'intervalles (qui forment une algèbre de parties) la mesure λ s'étend de manière unique par somme finie de mesures d'intervalles disjoints. Cette extension reste une mesure sur $\mathcal{A}$ car elle préserve la σ-additivité. En remarquant que $\mathbb{R}$ est l'union des intervalles $[n, n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$, on remarque que λ est σ-finie. D'après le théorème de Carathéodory, la mesure λ s'étend de manière unique sur $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On obtient ainsi un espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'invariance par translation est montrée en exercice. □

Il est légitime de se demander si la mesure de Lebesgue peut-être étendue sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. La réponse est non mais la construction d'un contre exemple n'est pas évidente et nécessite l'usage de l'axiome du choix. Voir Annexe A.

Proposition 1.25 ($\boldsymbol{\lambda}$ *ne peut pas mesurer toutes les parties*)

Il n'existe pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \lambda$. Par conséquent, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire qu'il existe des ensembles parties de $\mathbb{R}$ non boréliennes.

Preuve : Voir exercice 18. □

Remarque : Même si $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il est très difficile de construire un ensemble non borélien. Le preuve de leur existence repose nécessairement sur l'axiome de choix. Du point de vue de l'élève ingénieur toute partie de $\mathbb{R}$ « explicitement construite »pourra être considérée comme borélienne. Néanmoins, pour la rigueur, il faut être capable de le justifier par des arguments simples ce qui est en général facile grâce à la proposition 1.16.

VI Parties négligeables et completion de mesure

Définition 1.26 Une partie $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ est dite **μ-négligeable** s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que

$$N \subset A \quad \text{et} \quad \mu(A) = 0.$$

Remarque : Un ensemble mesurable de mesure nulle est donc négligeable mais un ensemble négligeable n'est pas forcément mesurable.

Remarque : Si une proposition $P(x)$, $x \in \Omega$ est vraie **μ-presque partout** et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure utilisée, on écrira indifféremment

- P vraie p.p. sur Ω,
- $P(x)$ vraie pour presque tout $x \in \Omega$,
- $P(x)$ vraie p.p.t. $x \in \Omega$.

Proposition 1.27 (*Union de négligeables*)

Toute union dénombrable de négligeables est négligeable.

Preuve : Par σ-additivité. □

Définition 1.28 On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables. On appelle **tribu complétée** la tribu $\overline{\mathcal{F}}$ engendrée par $\mathcal{F} \cup \mathcal{N}$. On montre facilement que cette tribu est donnée par

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{F},\ N \in \mathcal{N}\}.$$

On peut étendre canoniquement la mesure μ sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$. Cette mesure s'appelle **mesure complétée** et l'espace mesuré obtenu $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ est appelé **espace mesuré complété** de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Définition 1.29 La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^d$), complétée par les ensembles λ (resp. λ_d)-négligeables s'appelle la **tribu de Lebesgue**, notée $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$). La mesure de Lebesgue s'étend par completion sur la tribu de Lebesgue de manière unique. La mesure complétée se note encore λ (resp. λ_d).

Proposition 1.30

$\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Preuve : C'est une conséquence de la proposition 1.25. □

Notons que les notions de tribu borélienne et de mesure borélienne et de sa complétée ne requièrent que l'existence d'une famille suffisamment riche d'ouverts (une topologie) et on peut étendre la construction de Lebesgue à bon nombre d'espaces mesurés. Notons en particulier :

- La mesure de Lebesgue restreinte à un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$.
- La famille des **mesures de Radon** μ qui sont des mesures définies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telles que $\mu(K) < +\infty$ pour tout K compact.
- La **mesure de Lebesgue-Stieltjes** sur $\mathbb{R}$ qui se définit, étant donnée une fonction F croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$, comme l'unique prolongement de la mesure définie par $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$ pour tous $a < b$.

La mesure de Lebesgue est un cas particulier de chacun des exemples ci-dessus.

VII Tribus produits et mesures produits

Définition 1.31 Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$,..., $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ n espaces mesurables. On appelle **tribu produit** sur $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ et on note $\mathcal{F}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les produits $A_1 \times ... \times A_n$ tels que $A_1 \in \mathcal{F}_1$, ..., $A_n \in \mathcal{F}_n$.

Exemple : La tribu engendrée par les pavés mesurables $B_1 \times ... \times B_d$, où $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout i, est la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ des boréliens sur $\mathbb{R}^d$. Cela s'écrit

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} := \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes ... \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Cela signifie que la tribu engendrée par les pavés mesurables coïncide avec celle engendrée par les pavés (i.e. les produits d'intervalles).

Proposition 1.32 (*Mesure produit*)

Soient μ_1,...,μ_n des mesures σ-finies sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, ..., $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ respectivement. Il existe une unique mesure μ sur l'espace mesurable $(\Omega_1 \times ... \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{F}_n)$ telle que

$$\mu(A_1 \times ... \times A_n) = \mu_1(A_1)...\mu_n(A_n) \quad \forall\ (A_1, ..., A_n) \in \mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_n. \tag{1.3}$$

De plus, cette mesure est σ-finie. On note cette mesure

$$\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n.$$

Preuve : On commence par définir μ sur le clan des unions finies de pavés mesurables par la propriété d'additivité. Ensuite, c'est une conséquence directe du théorème de Carathéodory 1.22. La mesure ainsi définie est σ-finie. □

Remarque : On peut étendre la notion de produit de tribu et produits de mesure à des produits infinis dénombrables.

Théorème 1.33 (*Mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$)

Il existe un unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ notée λ_d telle que pour tout $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a_i \leq b_i$ pour tout i on a

$$\lambda_d \left(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

De plus λ_d est invariante par translation. Cette mesure est appelée **mesure de Lebesgue** *sur $\mathbb{R}^d$. Cette mesure est le produit d fois de le mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:*

$$\lambda_d = \underbrace{\lambda \otimes ... \otimes \lambda}_{d \text{ fois}}.$$

Preuve : C'est une conséquence de la proposition précédente appliqué à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

□

VIII Exercices

Exercice 1. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m ainsi définie est-elle une mesure ?

Exercice 2. Propriétés élémentaires Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ une espace mesuré, $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ et $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ si $\mu(A) < +\infty$.

2. Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

3. Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad (\sigma - \text{sous-additivité})$$

Exercice 3. Montrer que si μ est une mesure finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ est invariante par translation, alors elle est nulle.

Exercice 4. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

2. Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_N) < +\infty$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Exercice 5. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de parties sur Ω et $A, B \in \mathcal{A}$, a-t-on $A \cap B \in \mathcal{A}$?

Exercice 6. La réunion de deux tribus est-elle une tribu ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\})$ soit une tribu.

Exercice 7. Tribu engendrée par une union. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ non vides. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) \quad \text{si} \quad \emptyset \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$
$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) \quad \text{si} \quad \Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

Exercice 8. Quelle est le cardinal de la tribu engendrée par une partition à n éléments non vides ?

Exercice 9. Théorème de Cantor. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On note

$$D := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}.$$

1. Montrer qu'il n'existe pas d'entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(p) = D$.

2. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

3. Montrer qu'une tribu engendrée par une partition dénombrable n'est pas dénombrable.

Exercice 10. On définit $\mathcal{T}$ comme la tribu engendrée par les parties finies de $\mathbb{R}$.
1. Donner une description explicite de $\mathcal{T}$.
2. Comparer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = \lambda(A)$ si A est majoré et $m(A) = +\infty$ sinon.
1. Montrer que m est additive.
2. Est-ce que m est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$?

Exercice 12. On note $\mathcal{X} := \{\{0,1\}, [0,1]\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
1. Calculer $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{X})$ la tribu engendrée par $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{R}$. On muni cette tribu de la mesure de Lebesgue λ.
2. Quel sont les éléments de $\mathcal{F}$ de mesure nulle ?
3. Calculer la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 13. Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est stable par translation :

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad x + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

On peut considerer l'ensemble $\mathcal{A} := \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; x + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}$

Exercice 14. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{]-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 15. Caractérisation de la mesure de Lebesgue
1. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \forall u \in \mathbb{R}^d,\ \lambda_d(u + B) = \lambda_d(B).$$

2. Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ de masse finie sur les compacts invariante par translations. Montrer que μ est égale à $k\lambda$ où k est une constante positive finie.

Exercice 16. Mesure de Lebesgue-Stieltjes Soit F une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue à droite. On définit, pour tous a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_F(]a,b]) = F(b) - F(a),\ \lambda_F(]-\infty,a]) = F(a) - \lim_{t\to-\infty} F(t) \text{ et } \lambda_F(]b,+\infty[) = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(b).$$

On peut alors démontrer que λ_F st une mesure borélienne appelée mesure de Lebesgue-Stieltjes.
1. Calculer la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction $F := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$.
2. Montrer qu'il existe une mesure λ_F sur l'algèbre de parties formée par l'ensemble des réunions finies d'intervalles vérifiant

$$\lambda_F(]x,y]) = F(y) - F(x).$$

3. Montrer que λ_F peut se prolonger de manière unique à une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 17. Tribu produit et mesure produit. On veut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
3. Montrer que si $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Conclure.

Exercice 18. Un ensemble non borélien Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble

$$A_x := \{ y \in [0,1] \mid y - x \in \mathbb{Q} \} .$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, A_x est non vide.

Grâce à l'axiome du choix, on construit un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, V contient un unique élément de A_x. On suppose λ s'étend sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ainsi V est mesurable. Soit (q_n) la suite des rationnels inclus dans $[-1,1]$. Pour tout n, on note alors $V_n := V + q_n$ alors tous mesurables. On note $W := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

2. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite disjointe de parties de $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $\lambda(W) \leq 3$. En déduire que $\lambda(V) = 0$.

4. Montrer que $[0,1] \subset W$.

5. Conclure.

Chapitre 2

Fonctions mesurables

Sommaire

En préliminaire de chapitre, il est utile de lire les parties IV, V et VI de l'annexe A portant sur les images et images réciproques d'ensembles et d'ensembles de parties. Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ désignent deux espaces mesurables. On note $f : \Omega \to \Omega'$ une fonction.

I Fonction mesurables

Définition 2.1 On dit que f est **mesurable** si

$$\forall B \in \mathcal{F}', \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Autrement dit si $f^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des tribus boréliennes, on dit aussi que f est **borélienne**.

Remarque :

Exemple :

1. Si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, toutes les fonctions sont mesurables.
2. On suppose que $\mathcal{F}'$ contient les singletons de Ω' (typiquement $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Alors si $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, f est mesurable si et seulement si f est constante. Plus généralement, lorsque $\mathcal{F}$ est engendrée par une partition dénombrable, les applications mesurables sont celles qui sont constantes sur chaque élément de la partition.
3. On suppose $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors, si $A \subset \Omega$, la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Définition 2.2 Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **image directe de $\mathcal{A}$** par f la partie de $\mathcal{P}(\Omega')$ définie par

$$f(\mathcal{A}) := \{B \in \mathcal{P}(\Omega') \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Pour tout $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$, on appelle **image réciproque de $\mathcal{B}$** par f la partie de $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Proposition 2.3 (***Tribu engendrée, tribu image***)

1. *Soit $\mathcal{F}'$ une tribu sur Ω'. Alors son image réciproque par f est une tribu sur Ω et c'est la plus petite tribu sur Ω qui rend f mesurable de Ω dans $(\Omega', \mathcal{F}')$. On l'appelle* **tribu engendrée par** *f et on la note $\sigma(f)$.*
2. *Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Son image directe par f est une tribu sur Ω', c'est la plus grosse tribu sur Ω' rendant f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans Ω'.*

Preuve : Exercice. □

Proposition 2.4 (***CNS de mesurabilité***)

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega')$ en ensemble de parties tel que $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{F}'$. La fonction f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega', \mathcal{F}')$ si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Preuve : Le sens direct est immédiat. Pour le sens réciproque, on part de l'hypothèse $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est une tribu, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) \subset \mathcal{F}$. Grâce à la proposition A.11 et à la monotonie on a

$$\mathcal{B} \subset f(f^{-1}(\mathcal{B})) \subset f\big(\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))\big).$$

Le membre de droite étant une tribu, on a $\sigma(\mathcal{B}) \subset f\big(\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))\big)$ donc

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{B})) \subset f^{-1}\Big(f\big(\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))\big)\Big) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) \subset \mathcal{F}.$$

Ainsi, $f^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$ et donc f est mesurable. □

Ce résultat est très utile en pratique pour montrer la mesurabilité d'une fonction car on a moins d'ensemble à considerer que dans la définition.

Exemple : Soit $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application. Alors f est mesurable si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$.

Proposition 2.5 (***Composition***)

Soient $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ et $g : (\Omega', \mathcal{F}') \to (\Omega'', \mathcal{F}'')$, deux applications mesurables. Alors $g \circ f$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega'', \mathcal{F}'')$.

Preuve : Trivial. □

Proposition 2.6 (***Fonctions vectorielles***)

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ pour $i = 1...n$, $n \geq 2$, des espaces mesurables. Soit f une application de Ω dans $\Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$. Autrement dit, $f = (f_1, ..., f_n)$ où les f_i sont des applications de Ω dans Ω_i pour tout i.

L'application f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega_1 \times ... \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{F}_n)$ si et seulement si les applications f_i sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ pour tout i.

Proposition 2.7 (***Conditions de mesurabilité dans les tribus boréliennes***)

On pose $m, n, \in \mathbb{N}^*$.

1. *Si* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est continue, alors elle est mesurable de* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ *dans* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
2. *Soient* f *et* g *deux applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. *Alors* $x \mapsto \|f(x)\|$, $f+g$, αf, *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *sont mesurables.*

Remarque : Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sont également mesurables.

Proposition 2.8 (***Operations sur les fonctions mesurables***)

1. *Soient* f *et* g *deux applications mesurables à valeurs dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Alors,* fg, $\mathbf{1}_{\{g\neq 0\}} f/g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ *sont mesurables.*
2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles. Alors, si elles sont définies sur* Ω, *les fonctions* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ *sont mesurables.*
3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables à valeurs dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. *Alors, sa limite simple, si elle existe, est mesurable. De façon plus générale, si on note* C *l'ensemble des points sur lesquels la suite converge, alors* C *est mesurable et* $\lim_n f_n \mathbf{1}_C$ *est mesurable.*

Preuve : Exercice. □

Proposition 2.9

Toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est borélienne.*

Preuve : Exercice. □

Remarque : De même qu'il est très difficile de construire un ensemble non borélien, il est très difficile de construire une fonction non borélienne. La preuve de leur existence repose nécessairement sur l'axiome de choix. Du point de vue de l'élève ingénieur toute fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ « explicitement construite » pourra être considérée comme borélienne. Néanmoins, pour la rigueur, il faut être capable de le justifier par des arguments simples ce qui est en général facile grâce aux propositions précédentes et à la proposition 1.16.

II Fonctions étagées

Les fonctions étagées sont des fonctions mesurables particulières dont la structure simple sera très utile pour la construction de l'intégrale de Lebesgue entre autres.

Définition 2.10 On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une **fonction étagée** si

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad A_i \in \mathcal{F}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Remarque : Les fonctions étagées sont mesurables.

Théorème 2.11

Toute fonction $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive est mesurable si et seulement si elle est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées.

Preuve : Le sens direct est déjà démontré. Pour le sens réciproque : soit f une fonction mesurable positive. Pour tout $n \geq 1$, on définit [1]

$$f_n = n\mathbf{1}_{\{f>n\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n}<f\leq\frac{k+1}{2^n}\}}.$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées convergeant simplement vers f. □

Corollaire 2.12

Toute fonction $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est mesurable si et seulement si elle est limite simple d'une suite de fonctions étagées.

Preuve : Sens direct : grâce au théorème précédent, les parties positive et négative de f sont limites simples de suites croissantes de fonction étagées (g_n) et (h_n). Donc f est limite simple de $(g_n - h_n)$. Sens réciproque : grâce à la proposition 2.8. □

Théorème 2.13

Soit f une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et soit g mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La fonction g est $\sigma(f)$-mesurable si et seulement si il existe $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $g = \psi \circ f$.

Preuve : Voir TD. □

III Mesures images

À partir d'un espace mesuré et d'une fonction mesurable, on peut construire une nouvelle mesure sur l'espace d'arrivée appelée mesure image. Cette mesure est très utilisée, en particulier en théorie des probabilités.

Proposition 2.14 (*Mesure image par une application mesurable*)

Soit h une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On définit μ_h sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mu_h(B) = \mu(h^{-1}(B)),\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Alors μ_h est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Elle est appelée la **mesure image** *de μ par h*

1. On note souvent $\{h \in B\}$ l'ensemble $h^{-1}(B) = \{x \in \Omega \mid h(x) \in B\}$ (voir plus loin). Par exemple, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\{f \leq t\}$, pour $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$.

Preuve : Exercice. □

On utilise en général la notation $\mu\{h \in B\}$ pour la quantité $\mu_h(B) = \mu(h^{-1}(B))$. On rencontre parfois la notation $h\mu$ pour désigner μ_h, notamment lorsque l'on veut appliquer plusieurs transformations successivement. On peut ainsi construire de nouvelles mesures en les transportant d'un espace sur un autre. La convolution est un exemple de cette construction.

Exemple : Pour définir la mesure de Lebesgue sur le cercle unité $\mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, on pose

$$f : ([0, 2\pi[, \mathcal{B}([0, 2\pi[)) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$$

définie par $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Cette fonction est continue donc mesurable. On définie alors la mesure de Lebesgue du cercle $\mathcal{S}^1$ par $\lambda_{\mathcal{S}^1} = \lambda_f$. Notons que c'est une mesure définie sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Elle vérifie en particulier pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

- $\mathcal{S}^1 \subset B \ \Rightarrow\ \lambda_{\mathcal{S}^1}(B) = 2\pi$
- $\mathcal{S}^1 \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \lambda_{\mathcal{S}^1}(B) = 0$.

IV Convolution de mesures

Définition 2.15 Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Le **produit de convolution** de μ et ν, notée $\mu \star \nu$ est la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ (x, y) & \mapsto & x + y. \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu \star \nu(B) = (\mu \otimes \nu)(T^{-1}(B))$ et donc

$$\mu \star \nu(B) = \mu \otimes \nu(\{(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2 \mid x + y \in B\}.$$

Remarque :

- L'application T définie ci-dessus est continue et donc mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, ce qui justifie que l'on peut bien définir la mesure image par T d'une mesure.
- On peut généraliser à plusieurs mesures car le produit de convolution est une opération associative. Elle est également commutative.
- On verra dans le chapitre suivant le lien avec la convolution de fonctions.
- Cette notion est particulièrement utile en théorie des probabilités (voir théorème 4.20).

Exemple : Si μ et ν sont discrètes alors $\mu \star \nu$ également. Plus précisément, si

$$\mu = \sum_k \mu_k \delta_{x_k} \quad \text{et} \quad \nu = \sum_k \nu_k \delta_{y_k}$$

alors

$$\mu \star \nu = \sum_k \sum_l \mu_k \nu_l \delta_{x_k + y_l}.$$

En particulier, si $x_k = y_k = k$ pour tout k, alors

$$\mu \star \nu = \sum_k \left(\sum_{l=0}^{k} \mu_l \nu_{k-l} \right) \delta_k.$$

V Exercices

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' est borélienne.

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$ deux espaces mesurables, et soit $f : \Omega \to \Omega'$ une application.

1. Montrer que si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, toutes les applications sont mesurables.

2. On suppose que $\mathcal{F}'$ contient les singletons de Ω' (typiquement $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
Monter que si $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, f est mesurable si et seulement si f est constante.

3. Montrer que lorsque $\mathcal{F}$ est engendrée par une partition dénombrable, les applications mesurables sont celles qui sont constantes sur chaque élément de la partition.

4. On suppose $\Omega' = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, si $A \subset \Omega$, la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Exercice 3. Soient Ω, Ω' deux ensembles non vides. Soient $\mathcal{F}'$ une tribu sur Ω' et f une application de Ω dans Ω'.

1. Montrer que $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{F}')$ est une tribu.

2. Montrer que $\sigma(f)$ est la plus petite tribu rendant f mesurable.

Exercice 4. Fonctions mesurables

1. Montrer que toute fonction croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

2. Montrer que le maximum de deux fonctions mesurables est mesurable.

3. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que $\limsup_{n \to \infty} f_n$ est mesurable. En déduire que la limite simple de fonctions mesurables est mesurable. *On pourra traiter cette question après avoir fait lu l'annexe sur les limites supérieures et inférieures.*

Exercice 5. On à déjà vu que l'ensemble de parties

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est engendrée par les parties finies de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective. Montrer que f est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

2. Donner une application f borélienne qui n'est pas mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Exercice 6. Convolution de mesures discrètes. On commence par définir la mesure produit de deux masses de Dirac, puis leur convolution.

1. Soient x, $y \in \mathbb{R}^d$. Calculer $\delta_x \otimes \delta_y$.

2. En déduire $\delta_x \star \delta_y$.

3. On suppose

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta_{x_k} \text{ et } \nu = \sum_{\ell=1}^{m} \nu_\ell \delta_{y_\ell}$$

pour des entiers n, $m \geq 1$, des réels μ_k et ν_l et des points x_k et y_ℓ de $\mathbb{R}^d$. alors

$$\mu \star \nu = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \mu_k \nu_\ell \delta_{x_k + y_\ell}.$$

Exercice 7. Démontrer le théorème du cours suivant :

Soit f une fonction mesurable d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et soit g mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La fonction g est $\sigma(f)$-mesurable si et seulement si il existe $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $g = \psi \circ f$.

Exercice 8. Images de tribus Cet exercice reprend le point (ii) de la proposition 2.4.

1. Soient Ω, Ω' deux ensembles non vides, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $f : \Omega \to \Omega'$. On pose

$$\mathcal{F}' := \{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Donner un exemple pour montrer que $\mathcal{F}'$ n'est pas une tribu en général. Montrer que si f est injective, $\mathcal{F}'$ est une tribu sur $f(\Omega)$.

2. Montrer (ii).

Exercice 9. Un critère de mesurabilité. Soient $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ deux ensembles non vides. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une partition mesurable de Ω.

Montrer que f est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si pour tout $n \geq 0$ la restriction $f_{|A_n}$ de f à A_n est mesurable par rapport à la tribu induite par $\mathcal{F}$ sur A_n noté $\mathcal{F}_{|A_n} = \{A_n \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$.

Chapitre 3

Intégrale de Lebesgue

Sommaire

Le but de ce chapitre est de construire une notion d'intégrale qui s'appuie sur la théorie de mesure. Cette notion, définie sur un espace mesuré quelconque $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ doit permettre de définir l'intégrale d'un maximum de fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$ tout en respectant la propriété intuitive suivante :

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A), \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ cette intégrale va prolonger l'intégrale de Riemann. Dans le cadre de la théorie des probabilités, elle permettra de définir la notion fondamentale d'espérance.

Dans tout ce chapitre, on considère un espace mesuré quelconque $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

I Fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

La définition de la mesurabilité s'étend naturellement aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 3.1 On dit que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est **mesurable** si

- pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$,
- $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{F}$ et $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{F}$.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces fonctions mesurables et $\mathcal{M}_+$ l'ensemble de ces fonctions mesurables positives.

Avec cette définition élargie, les fonctions mesurables conservent toutes les propriétés vues dans le chapitre précédent. En particulier :

- Un fonction $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ positive est mesurable si et seulement si elle est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées.

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\mathcal{M}$, alors les fonctions $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ et $\lim f_n$ (si elle existe) sont dans $\mathcal{M}$.
- $f \in \mathcal{M}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borelienne. Alors $\varphi \circ f \in \mathcal{M}$.

II Intégrale de fonctions étagées positives

Définition 3.2 Soit $f \in \mathcal{E}_+$ donnée par $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. On définit **l'intégrale de Lebesgue** de f sur Ω par rapport à la mesure μ est

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

avec la convention $0 \times \mu(A_i) = 0$ quand $\mu(A_i) = +\infty$.

Remarque : On note aussi cette intégrale

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_\Omega f \quad \text{ou} \quad \int f$$

s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure utilisée.

Pour construire l'intégrale des fonctions mesurables positives, on va approcher celles-ci par des suites croissantes de fonctions étagées. L'intégrale de la fonction sera définie comme la limite de la suite des intégrales des fonctions étagées.

Lemme 3.3 (*Monotonie dans $\mathcal{E}_+$*)

$$\forall f, g \in \mathcal{E}_+, \qquad f \le g \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f\,d\mu \le \int_\Omega g\,d\mu.$$

Preuve : On remarque que l'on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_i)_{i=1..N}$, $(\beta_i)_{i=1..N}$ des suites réelles et $(B_i)_{i=1..N}$ une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{F}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{B_i} \text{ et } g = \sum_{i=1}^N \beta_i \mathbf{1}_{B_i}.$$

Alors $f \le g$ implique $\alpha_i \le \beta_i$ pour tout i et la définition de l'intégrale donne le résultat escompté. □

Lemme 3.4

Soit $f \in \mathcal{E}_+$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{E}_+$, alors

$$f \le \lim_{n\to+\infty} f_n \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f\,d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu.$$

Preuve : On écrit $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n = \{x \in \Omega \mid (1-\varepsilon) f(x) \le f_n(x)\}.$$

Comme $(1-\varepsilon)f$ et f_n sont mesurables et $E_n = ((1-\varepsilon)f - f_n)^{-1}(]-\infty, 0])$, les ensembles E_n sont mesurables pour tout n. De plus $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de limite Ω.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme l'intégrale est croissante,

$$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega \mathbf{1}_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geq (1-\varepsilon) \int_\Omega \mathbf{1}_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu = (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} A_i \cap E_n = A_i$ on a $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$, on passe à la limite dans l'inégalité précédente ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geq (1-\varepsilon) \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

pour tout $\varepsilon > 0$ d'où le résultat. □

III Intégrale des fonctions mesurables positives

Pour étendre la notion d'intégrale des fonctions étagées positive aux fonctions mesurables positives il faut pouvoir passer à la limite sur des suite de fonction étagées. En effet, on sais déjà que toute fonction mesurable positive f est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la Lemme de monotonie, on sait que la suite

$$\left(\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est croissante et admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Il faut maintenant vérifier que cette limite ne dépend pas du choix de la suite (f_n).

Lemme 3.5 (*Unicité de la limite des intégrales*)

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{E}_+$ qui convergent simplement vers la même fonction $f \in \mathcal{M}_+$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$$

Preuve : D'après le lemme 3.4, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $g_N \leq f$ donc $g \leq \lim_{n\to+\infty} f_n$ et donc

$$\int_\Omega g_N \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

En passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega g_N \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Par symétrie de rôle de (f_n) et (g_n), on montre l'inégalité dans l'autre sens. □

Définition 3.6 Soit $f \in \mathcal{M}_+$, on définit **l'intégrale de Lebesgue de** f par rapport à la mesure μ, la quantité

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante quelconque de $\mathcal{E}_+$ qui converge simplement vers f.

Proposition 3.7 (*monotonie pour les mesurables positives*)

$$\forall f, g \in \mathcal{M}_+, \qquad f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu.$$

Preuve : Facile, en s'inspirant des lemmes précédents. □

IV Intégrale des fonctions intégrables

1 Définition

Définition 3.8 Un fonction $f \in \mathcal{M}$ est dite **intégrable** par rapport à la mesure μ si

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

L'ensemble des fonctions intégrable se note $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ou $\mathscr{L}^1$ en abrégé.

Remarque : Cette définition à bien un sens car si $\in \mathcal{M}$, alors $|f| \in \mathcal{M}_+$ est mesurable positive donc on peut calculer sont intégrale de Lebesgue.

Remarque : Si f est une fonction intégrable, les fonction f^+ et f^- qui sont naturellement dans $\mathcal{M}_+$ sont aussi intégrable. En effet comme $|f| = f^+ + f^-$ on a $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$ et onc

$$\int_\Omega f^\pm \leq \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Définition 3.9 Soit f une fonction intégrable par rapport à la mesure μ. On définit son **intégrale de Lebesgue** par rapport à la mesure μ par

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu.$$

Elle appartient à $\mathbb{R}$.

Remarque : Le vocabulaire demande un peu d'attention ici car on peut calculer l'intégrale d'une fonction non intégrable, dès lors qu'elle est mesurable positive. Dans ce cas la valeur obtenue est $+\infty$.

Remarque :

1. Quelques notations : soit $E \in \mathcal{F}$. Pour tout $f \in \mathcal{M}$, si $f\mathbf{1}_E$ est intégrable, on définit l'intégrale de f sur E par

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

   Cette définition coïncide avec l'intégrale définie sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{F}_E, \mu_E)$ où $\mathcal{F}_E = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{F}\}$ et μ_E est la restriction de μ à $\mathcal{F}_E$.On note aussi cette intégrale

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_E f$$

s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure utilisée. Suir $\mathbb{R}$, on utilise aussi la notation

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}\mu.$$

2. Fonctions à valeurs vectorielles : Si $f = (f_1, ..., f_d)$ est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^d}$, on dit que f est intégrable si tous les f_i sont intégrables (ou de manière équivalente si $\|f\|$ est intégrable) et on note

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \left(\int_\Omega f_1\mathrm{d}\mu, ..., \int_\Omega f_d\mathrm{d}\mu\right) \in \mathbb{R}^d.$$

3. Fonctions à valeurs complexes : Si f à valeurs dans $\mathbb{C}$ est telle que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables, on définit l'intégrale de f par

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathrm{Re}(f)\mathrm{d}\mu + i\int_\Omega \mathrm{Im}(f)\mathrm{d}\mu.$$

2 Propriétés

Proposition 3.10 (*Lebesgue étend Riemann*)

L'intégrale de Lebesgue sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ étend l'intégrale de Riemann des fonctions continues par mocreaux. Ainsi, tout les résultats et toutes les règles de calcul sur l'intégrale de Riemann sur les intervalles de $\mathbb{R}$ sont toujours valables pour l'intégrale de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Preuve : Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue par morceaux sur I. On sait que f est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions constantes par morceaux (f_n). Les fonctions constantes par morceaux sont un cas particulier des fonctions étagées et la convergence uniforme implique la convergence simple. De plus, l'intégrale de Riemann des fonctions constantes par morceaux coïncide avec l'intégrale de Lebesgue pour la mesure de Lebesgue λ. En passant à la limite, les deux intégrales coïncident aussi pour f. □

Proposition 3.11 (*Linéarité*)

1. *L'ensemble $\mathscr{L}^1$ est stable par addition et multiplication par un scalaire.*
2. *L'application $f \mapsto \int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ est linéaire sur $\mathscr{L}^1$.*

Preuve : Voir TD 3. □

Proposition 3.12 (***Monotonie***)

L'intégrale est monotone sur $\mathscr{L}^1$

$$\forall f, g \in \mathscr{L}^1, \qquad f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu,$$

par ailleurs

$$\forall f \in \mathscr{L}^1, \qquad \left| \int_\Omega f d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| d\mu,$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 3.13 (***Parties négligeables et intégrale***)

1. *Soit* $f \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$*, alors pour tout* N *un ensemble mesurable* μ*-négligeable on a*
$$\int_N f \, d\mu = 0.$$
2. *Si* f *est nulle* μ*-presque partout, alors* f *est intégrable et*
$$\int_\Omega f d\mu = 0.$$
3. *On a*
$$\int_\Omega |f| d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \mu - p.p.$$
4. *Soient* $f, g \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$*, alors*
$$f = g \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$$
$$f \leq g \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$$

Preuve : Voir TD 3. □

V Théorèmes de convergence

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats de convergence pour les intégrales de suites de fonctions mesurables. Nous commençons par étendre le lemme 3.4 pour des suites croissante de fonctions mesurables.

Lemme 3.14

Soit $f \in \mathcal{E}_+$ *et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite croissante de* $\mathcal{M}_+$*, alors*

$$f \leq \lim_{n \to +\infty} f_n \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Preuve : Identique à la preuve de lemme 3.4. □

Théorème 3.15 (*Beppo-Levi - Convergence monotone - TCM*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{M}_+$. Alors $\lim_n f_n \in \mathcal{M}_+$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu.$$

Preuve : On note $f = \lim_n f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. C'est une fonction positive et mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. Comme (f_n) est croissante, $f_n \leq f$ pour tout n donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int f_n \leq \int f$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n \leq \int f.$$

Soit maintenant une suite (g_n) croissante de $\mathcal{E}^+$ qui converge simplement vers f. On a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$g_N \leq f \leq \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

D'après le lemme 3.14, on a

$$\int g_N \leq \lim_{n\to+\infty}\int f_n.$$

On passe à la limite quand $N \to +\infty$, ce qui, par définition de l'intégrale de f donne

$$\int f \leq \lim_{n\to+\infty}\int f_n.$$

□

Voici deux corollaires immédiats de la convergence monotone.

Corollaire 3.16 (*Lemme de Fatou*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_+$, alors

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\mu.$$

Preuve : Voir TD 4.

□

Corollaire 3.17 (*Permutation série - intégrale*)

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{M}_+$. Alors

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega f_n d\mu.$$

Preuve : Exercice.

□

Proposition 3.18 (***Relation de Chasles dénombrable***)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$on a

$$\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 3.19 (***Exemples fondamentaux***)

1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On note δ_{x_0} la mesure de Dirac en $x_0 \in \Omega$. Alors toutes les fonctions mesurables f de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont intégrables et*

$$\int_\Omega f\ \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0).$$

2. *On suppose $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ où*

$$\mu(B) = \int_B \rho \mathrm{d}\lambda,\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

pour une certaine fonction ρ mesurable positive sur $\mathbb{R}^d$. Alors pour toute fonction f mesurable telle que $|f|\rho$ est Lebesgue intégrable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\ \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\rho\,\mathrm{d}\lambda.$$

Preuve : Exercice.

□

Théorème 3.20 (***Théorème de convergence dominée - Théorème de Lebesgue***)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables réelles et soit g une fonction intégrable réelle telles que

$$|f_n| \leq g \text{ presque partout.}$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f presque partout. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$$

ce qui implique

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\ \mathrm{d}\mu.$$

Preuve : On procède en deux étapes.

1. On suppose que les fonctions f_n sont presque partout positives sur Ω, que $f = 0$ presque partout.

   Alors la suite $g_n := (\sup_{k\geq n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et

   $$\lim_{n\to+\infty} g_n = \limsup_{n\to+\infty} f_n = 0 \quad \text{p.p..}$$

   On note $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite. Alors $(g - g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions presque partout positives, donc par le théorème de convergence monotone,

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (g - g_n)\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} (g - g_n)\mathrm{d}\mu$$

   soit, par linéarité de l'intégrale, et en simplifiant de part et d'autre par l'intégrale de g intégrable :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \mathrm{d}\mu = 0.$$

   Il suffit maintenant que remarquer que $f_n \leq g_n$ pour tout n pour conclure que

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = 0.$$

2. Cas général : On applique l'étape précédente à la suite $(|f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, comme les fonctions f_n sont mesurables et f est la limite presque partout de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction f, est mesurable. Comme les $|f_n|$ sont majorées par g presque partout, il en est de même pour $|f|$ qui est donc intégrable. On en déduit que $(|f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions positives, dominée par la fonction $2g$ qui est intégrale et de limite presque partout 0 et donc

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0.$$

□

VI Intégrales dépendant d'un paramètre

Les héorèmes de cette section sont classiquement enseigné en premier cycle pour l'intégrale pour Riemann. Nous les rappelons ici dans leur version générale pour l'intégrale de Lebesgue. Leurs démonstrations reposent toujours sur l'utilisation du théorème de convergence dominée. Elle ne sont pas donnée ici.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère une fonction $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$ telle que

$$(H1) : \forall t \in U, \quad x \mapsto f(x,t) \quad \text{est } \mu\text{-intégrable.} \tag{H1}$$

On définit alors $F : U \to \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t) d\mu(x)$$

et on s'intéresse à la régularité de la fonction F.

Proposition 3.21 (***Continuité en un point***)

Soit $t_0 \in U$. On suppose (H1) *et que*

- *p.p.t. $x \in \Omega$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t_0,*
- *$\exists g$ μ-intégrable telle que*

$$\forall t \in U, \quad \text{p.p.t. } x \in \Omega, \qquad |f(x,t)| \leq g(x),$$

alors F est continue en t_0.

Proposition 3.22 (***Continuité***)

On suppose (H1) *et que*

- *p.p.t. $x \in \Omega$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur U,*
- *il existe g μ-intégrable telle que*

$$\forall t \in U, \quad \text{p.p.t. } x \in \Omega, \qquad |f(x,t)| \leq g(x),$$

Alors F est continue sur U.

Proposition 3.23 (***Dérivabilité***)

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On suppose (H1) *et que*

- *$\partial_{t_i} f(x,t)$ existe pour tout $(x,t) \in \Omega \times U$,*
- *$\exists g$ μ-intégrable telle que pour tout $t \in U$,*

$$\forall t \in U, \quad \text{p.p.t. } x \in \Omega, \qquad |\partial_{t_i} f(x,t)| \leq g(x),$$

alors F admet une i-ème dérivée partielle sur U donnée par

$$\partial_{t_i} F(t) = \int_\Omega \partial_{t_i} f(x,t) d\mu(x) \text{ pour tout } t \in U.$$

Si de plus $\partial_{t_i} f(x,.)$ est continue sur U pour tout x alors $\partial_{t_i} F$ est continue sur U.

Remarque : Comme pour la continuité, on peut localiser ce théorème pour obtenir de la régularité globale. Enfin, on peut itérer ce résultat pour donner un critère d'appartenance à C^k, $k \geq 2$ de F.

VII Autres théorèmes essentiels

Théorème 3.24 (***Théorème de Fubini***)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \nu)$ deux espaces mesurés et soit f une fonction mesurable de $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que f positive (resp. $\mu \otimes \nu$-intégrable). Alors, l'application définie μ- presque partout

$$x \mapsto \int_{\Omega'} f(x,y) d\nu(y)$$

est mesurable positive (resp. μ-intégrable) sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et l'application définie ν-presque sûrement

$$y \mapsto \int_{\Omega} f(x,y)\mu(dx)$$

est mesurable positive (resp. ν-intégrable) sur $(\Omega', \mathcal{F}')$. De plus

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega'} f \; d(\mu \otimes \nu) &= \int_{\Omega}\left(\int_{\Omega'} f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega'}\left(\int_{\Omega} f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Remarque : Le théorème de Fubini se généralise sur des produits finis d'espaces mesurés.

Théorème 3.25 (***Formule de transfert***)

Soit $h : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ mesurable. Soit μ_h la mesure image de μ par h. Alors pour toute fonction $f : (\Omega', \mathcal{F}') \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mesurable positive ou μ_h-intégrable on a

$$\int_{\Omega} f \circ h \, d\mu = \int_{\Omega'} f d\mu_h. \tag{3.1}$$

De plus, f est μ_h-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est μ-intégrable.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{E}_+(\Omega', \mathcal{F}')$ de la forme $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. On remarque que pour tout i, $\mathbf{1}_{A_i} \circ h = \mathbf{1}_{h^{-1}(A_i)}$ donc $f \circ h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{h^{-1}(A_i)}$ est encore une fonction étagée positive. Ainsi,

$$\int_{\Omega} f \circ h \, d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(h^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_h(A_i) = \int_{\Omega'} f \, d\mu_h.$$

Soit $f \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathcal{F}')$, et (f_n) une suite de $\mathcal{E}_+(\Omega', \mathcal{F}')$ croissante qui cvs vers f. Alors $(f_n \circ h)$ est uns suite croissante de $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{F})$ qui cvs vers $f \circ h$. Ainsi,

$$\int_{\Omega} f \circ h \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n \circ h \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} f_n \, d\mu_h = \int_{\Omega'} f \, d\mu_h.$$

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\Omega', \mathcal{F}', \mu_h)$, alors $f \circ h \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f \circ h \, d\mu &:= \int_{\Omega} (f \circ h)^+ \, d\mu - \int_{\Omega} (f \circ h)^- \, d\mu = \int_{\Omega} f^+ \circ h \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \circ h \, d\mu \\ &= \int_{\Omega'} f^+ \, d\mu_h - \int_{\Omega'} f^- \, d\mu_h = \int_{\Omega'} f \, d\mu_h.\end{aligned}$$

□

Voici un exemple d'application de la formule de transfert qui fait suite à la définition 2.15 de la convolution des mesures dont nous reprenons les notations.

Proposition 3.26

Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

1. *Pour toute fonction φ borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \mathrm{d}(\mu \star \nu) = \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \varphi(x+y)\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y). \tag{3.2}$$

2. *Une fonction borélienne φ est $\mu \star \nu$-intégrable si et seulement si $\varphi \circ T$ est $\mu \otimes \nu$-intégrable sur $(\mathbb{R}^d)^2$, et dans ce cas* (3.2) *est satisfaite.*

Remarque : D'un point de vue pratique, on peut ensuite appliquer le théorème de Fubini pour déduire de (3.2)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \mathrm{d}(\mu \star \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$$

Enfin, nous rappelons le théorème de changement de variable qui n'a de sens que pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Il s'agit dans ce cas d'expliciter la mesure μ_h dans la formule de transfert.

Il existe plusieurs preuves de ce théorème, qui sont de natures différentes. On peut utiliser la formule de transfert et le théorème de Radon-Nikodym (voir plus loin), comme dans le chapitre X du livre d'André Gramain (**Intégration**, Hermann 1998 ou 2021 pour l'ebook), ou une méthode plus analytique comme dans le livre de Rudin (**Analyse Réelle et complexe**, Dunod 2020) qui propose en outre une extension aux fonction ψ seulement bijectives et différentiables.

Théorème 3.27 (*changement de variable dans* $\mathbb{R}^d$)

Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\psi : U \to U'$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme[1]*. On note $D\psi$ la différentielle de ψ . Soit f une fonction borélienne réelle définie sur U'. Alors, f est intégrable sur U' si et seulement si $f \circ \psi |\det D\psi|$ est intégrable sur U. De plus, si f est positive ou intégrable sur U', on a*

$$\int_{U'} f(y)dy = \int_U f(\psi(x))|\det D\psi(x)|dx$$

ou encore

$$\int_{U'} f(y)|\det\ D\psi^{-1}(y)|dy = \int_U f(\psi(x))dx.$$

Remarque : $|\det\ D\psi(x)|$ s'appelle le jacobien de ψ. Dans la pratique, on utilise le théorème d'inversin globale, qui garantit que si ψ est bijective de U sur U', de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\det\ D\psi(x) \neq 0$ sur O alors ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans U'.

VIII Absolue continuité des mesures et densités

Dans cette partie, on donne quelques résultats abstraits qu'on omet souvent dans les cours d'intégration de base mais qui sont fondamentaux en théorie des probabilités. Ils concernent le cas particulier des mesures à densité très utilisées pour spécifier la loi de certaines variables aléatoires, mais aussi pour spécifier la mesurabilité des variables comme on le verra dans l'expression des espérances conditionnelles.

Définition 3.28 Soit μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que ν est une **mesure à densité** par rapport à μ s'il existe $f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

La fonction f est la densité de ν par rapport à μ.

Définition 3.29 Soient μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$. La mesure ν est dite **absolument continue** par rapport à μ, ce que l'on note $\nu << \mu$, si

$$\forall\ A \in \mathcal{F}, \qquad \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Théorème 3.30 (*Radon-Nikodym*)

Soient μ et ν deux mesures σ-finies. Si ν est absolument continue par rapport à μ, alors ν est à densité par rapport à μ.

Preuve : Admis. □

Remarque : Réciproquement, si μ admet une densité f par rapport à ν alors μ est absolument continue par rapport à ν. (Exercice).

On a bien sûr l'analogue abstrait de la proposition 3.19-(2) :

Théorème 3.31

Soient μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On suppose que μ admet la densité f par rapport à ν.

1. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{F})$,*

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \int_\Omega \varphi f d\nu. \tag{3.3}$$

2. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$, φ est μ-intégrable si et seulement si φf est ν-intégrable et dans ce cas l'égalité (3.3) est également vérifiée.*

Preuve : Exercice. □

Remarque : Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. On suppose qu'il existe une application f mesurable postive telle que pour tout φ mesurable positive (ou mesurable bornée, ou mesurable positive bornée), l'équation (3.3) est satisfaite. Alors μ admet pour densité f par rapport à la mesure ν. Il suffit de prendre les indicatrices d'ensembles mesurables pour s'en convaincre.

Nous illustrons cette remarque avec l'intégration contre le produit de convolution de mesures à densités :

Proposition 3.32

On suppose que $E = \mathbb{R}^d$ et que μ et ν sont respectivement de densités f et g par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, f et g étant intégrables. Alors $\mu \star \nu$ admet pour densité $f \star g$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $f \star g$ est intégrable.

Preuve : (à compléter). On montre que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d(\mu \star \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f \star g) \mathrm{d}\lambda$$

pour toute fonction φ borélienne bornée. Soit donc φ une telle fonction. On utilise (3.2) puis le théorème de Fubini et enfin l'absolue continuité de μ et ν par rapport à la mesure de Lebesgue. On obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d(\mu \star \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y) f(x) \mathrm{d}x \right) g(y) \mathrm{d}y.$$

Reste alors à faire le changement de variable $x \to z = x + y$ puis à appliquer à nouveau le théorème de Fubini. On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d(\mu \star \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z-y) g(y) \mathrm{d}y \right) dz$$

ce qui suffit pour conclure. □

Enfin, le résultat de décomposition de Lebesgue précise ce que sont les mesures boréliennes sur $\mathbb{R}^d$. Nous devons tout d'abord introduire une nouvelle notion :

Définition 3.33 Soient μ et ν deux mesures définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Les mesures μ et ν sont dites **étrangères**, ce que l'on note $\mu \perp \nu$, si

$$\exists \; A \in \mathcal{F}, \;\; \nu(A) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(A^c) = 0.$$

Théorème 3.34 (*Décomposition de Lebesgue*)

Soient λ et μ deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors il existe un unique couple de mesures (μ_1, μ_2) tel que

1. $\mu = \mu_1 + \mu_2$,
2. $\mu_1 << \lambda$,
3. $\mu_2 \perp \lambda$.

Corollaire 3.35

En particulier, toute mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ se décompose de façon unique comme somme d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et d'une mesure portée par un ensemble Lebesgue-négligeable.

IX Exercices

Dans ces exercices, on note $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Sur cet espace, on note : $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables, $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives, $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées, $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives et enfin $\mathscr{L}^1$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Exercice 1. Additivité et relation de Chasles.

1. Vérifier que pour tout $f, g \in \mathcal{E}_+$,

$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

en déduire que cette relation est vraie dans $\mathcal{M}_+$.

2. Montrer que pour tout $f, g \in \mathscr{L}^1$, alors $f + g \in \mathscr{L}^1$.

3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a la relation $(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+$. En déduire que pour tout $f, g \in \mathscr{L}^1$, la relation de la première question est vraie.

4. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$ et $A, B \in \mathcal{F}$ disjoints, on a

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f, \qquad \text{(Chasles)}.$$

Exercice 2. Intégrale et négligeables. *Dans chaque question, on pourra d'abord montrer la proposition pour des fonctions étagées positives.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$, montrer que pour tout $N \in \mathcal{F}$ μ-négligeable on a

$$\int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

2. Soit f mesurable nulle μ-presque partout. Montrer que f est intégrable et que

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0.$$

3. Montrer que réciproquement pour tout $f \in \mathcal{M}$,

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \mu - \text{p.p.}$$

4. Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{M}_+ \cup \mathscr{L}^1$, alors

$$f = g \quad \mu - \text{p.p.} \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \mathrm{d}\mu$$

$$f \leq g \quad \mu - \text{p.p.} \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \mathrm{d}\mu$$

Exercice 3. On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) e^x, \qquad f_2(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x),$$
$$f_3(x) = x, \qquad f_4(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x) e^{e^x} + \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}}(x) e^{-2x} - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Q}}(x) e^x.$$

Pour chacune d'elle, dire si la fonction est mesurable, intégrable sur $\mathbb{R}$ et si c'est possible, donner la valeur de son intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Mesure de Dirac. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_z)$ ou δ_z est la mesure de Dirac en $z \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que toute fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.

2. Montrer que si f est positive ou intégrable, alors sont intégrale est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_z = f(z).$$

Exercice 5. Changement de mesure. On considère la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est borélienne.

2. Quelle est sont intégrale pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$? Est-elle intégrable ?

3. On muni à présent $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et de la mesure discrete $\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{k^2}$. Donner son intégrale par apport à μ. La fonction f est elle intégrable ?

Exercice 6. Limite simple et intégrale. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n = \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$.

1. Montrer que la suite (f_n) est une suite de fonctions étagées qui converge simplement vers 0.

2. Quel est la limite des intégrales de f_n ? N'est-ce pas contradictoire avec la définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive ?

3. Pourquoi le théorème de convergence dominée ne s'applique pas ici ?

Exercice 7. Définition alternative de l'intégrale. Montrer que si f est mesurable positive sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors sont intégrale vérifie

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int_{\Omega} g \mathrm{d}\mu \;\middle|\; g \text{ étagée positive, } g \leq f \right\}.$$

Exercice 8. On rappelle le lemme de Fatou : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_+$, alors

$$\int_{\Omega} \liminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu.$$

1. Démontrer ce lemme.

2. En considérant le suite $f_n(x) = ne^{-nx}$ sur $]0, +\infty[$, vérifier qu'on a pas d'égalité en général.

Exercice 9. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{M}_+$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{M}_+$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu \leq M,$$

démontrer que

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \leq M.$$

Exercice 10. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $t_0 \in U$. On considère une fonction $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall t \in U$, $x \mapsto f(x,t)$ est μ-intégrable,

2. p.p.t. $x \in \Omega$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t_0,
3. il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-intégrable telle que

$$\forall t \in U, \quad \text{p.p.t. } x \in \Omega, \qquad |f(x,t)| \leq g(x).$$

Montrer que la fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$$

est continue en t_0.

Exercice 11. Limite simple et intégrale (bis). On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n = \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$. On à montrer dans le TD 3 que la suite (f_n) est une suite de fonctions étagées qui converge simplement vers 0.

1. Rappeler la valeur de limite de l'intégrale des f_n.

2. Montrer que les hypothèses du théorème de convergence dominée ne sont pas vérifiées.

Exercice 12. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ou μ est la mesure de comptage.

1. Justifier que toute les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

2. Montrer que pour toute $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{N}} f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

3. Montrer que pour toute suite positive à double indice $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

4. En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Exercice 13. Théorème fondamental de l'analyse. Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$, continue en 0 et 1 et de dérivée bornée sur $]0,1[$. Montrer que

$$\int_0^1 f'\mathrm{d}\lambda = f(1) - f(0).$$

Exercice 14. Soit $f \in \mathcal{M}_+$, démontrer la formule

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{\, x \in \Omega \mid f(x) > t \,\}\big)\mathrm{d}t.$$

Proposer un interprétation géométrique ce cette formule.

Exercice 15. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une application mesurable et positive. Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $\phi : \Omega \to E$ une bijection bi-mesurable (ϕ et ϕ^{-1} sont mesurables).
Soit $\tilde{\mu}$ une mesure sur Ω telle que $\tilde{\mu}$ a pour densité f par rapport à μ. Démontrer que la mesure image de $\tilde{\mu}$ par ϕ admet une densité, que l'on déterminera, par rapport à la mesure image de μ par ϕ.

Exercice 16. Produit de mesures à densité. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère deux fonctions $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^+$ μ_1-intégrable et positive, et $g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^+$ μ_2-intégrable et positive.

1. Démontrer que la mesure produit $(f\mathrm{d}\mu_1) \otimes (g\mathrm{d}\mu_2)$ est la mesure de densité fg par rapport à la mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$.

Soit $I =]0, +\infty[$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^+$ boréliennes et λ-intégrables, et l'application $p : (x, y) \to xy$ définie sur $I \times I$.

2. Démontrer que la mesure image μ de $(f\mathrm{d}\lambda) \otimes (g\mathrm{d}\lambda)$ par p est une mesure à densité et donner l'expression de sa densité au moyen d'une intégrale.

Chapitre 4

Théorie des probabilités

Sommaire

La théorie des probabilités peu être vue comme un cas particulier le la théorie de la mesure et de l'intégration. Seul le vocabulaire varie. Dans ce chapitre, Ω désigne un ensemble non vide que l'on appellera univers.

I Espaces probabilisés

Définition 4.1 En théorie des probabilités, les espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{F})$ sont appelés espaces **probabilisables**.

Définition 4.2 On appelle **mesure de probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ toute mesure positive $\mathbb{P}$ sur cet espace qui vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Cet espace muni d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est appelé **espace probabilisé** et se note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dans la suite de ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Voici un petit glossaire des principales différences de vocabulaire entre la théorie de la mesure et la théorie des probabilités.

Vocabulaire mesure	Vocabulaire probabilité
espace Ω	univers Ω
élément $x \in \Omega$	état $\omega \in \Omega$
espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$	espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$
partie mesurable $A \in \mathcal{F}$	évènement $A \in \mathcal{F}$
mesure μ	probabilité $\mathbb{P}$ (t.q. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$)
espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
vrai presque partout	vrai presque sûrement
$A, B \in \mathcal{F}$ disjoints	A, B évènements incompatibles
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ partition de Ω	$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ système complet d'évènements

Définition 4.3 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit $\mathbb{P}$-**presque sûr** ou $\mathbb{P}$-presque certain si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple : Probabilités uniformes.

- Si Ω est un ensemble fini non vide et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, la fonction définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$\mathbb{P}_{\mathrm{ud}}(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

  est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
- Si B_0 est un borélien de $\mathbb{R}^d$ tel que $0 < \lambda_d(B_0) < +\infty$ alors

$$\mathbb{P}_{\mathrm{uc}}(B) = \frac{\lambda_d(B \cap B_0)}{\lambda_d(B_0)}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

  est une probabilité appelée la probabilité uniforme sur B_0.

Définition 4.4 On appelle mesure **probabilité conditionnelle** par rapport à un évènement $B \in \mathcal{F}$ la mesure probabilité définie par

$$p(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Cette mesure de probabilité se note $\mathbb{P}(A|B)$. Cette valeur s'appelle la probabilité de A sachant B.

II Tribus indépendantes et évènements indépendants

Définition 4.5 Une famille finie de sous-tribus $\mathcal{F}_1$, ..., $\mathcal{F}_n$ de $\mathcal{F}$ est une **famille finie de sous-tribus indépendantes** si

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \qquad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n.$$

Une famille dénombrable de sous-tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **famille dénombrable de sous-tribus indépendantes** si pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$, la sous-famille finie $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ est une famille finie de sous-tribus indépendantes.

Exemple : Les tribus $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont indépendantes. En fait $\{\emptyset, \Omega\}$ est indépendante de n'importe quelle autre tribu.

Définition 4.6 Une famille finie ou dénombrable d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{F}$ est une famille d'**évènements indépendants** si $\big(\sigma(A_n)\big)_{n\in I}$ est une famille de sous-tribus indépendantes.

Remarque : L'indépendance des événements dépend de la mesure de probabilité choisie.

Exemple : $\emptyset$ et Ω sont indépendants de tous les événements. De même, tout événements de probabilité 0 ou 1 sont indépendants de tous les événements.

Exemple : Si $A \in \mathcal{F}$ est indépendant de lui même, alors $\mathbb{P}(A) = 1$ ou $\mathbb{P}(A) = 0$.

Proposition 4.7 (***Caractérisation des évènements indépendants***)

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évènements indépendant si seulement si

$$\forall J \text{ fini } \subset I, \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Preuve : Pas simple. □

Proposition 4.8 (***Intersection dénombrable d'évènements indépendants***)

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements indépendants, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Preuve : Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{n=0}^{N} A_n$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$. Dans l'autre sens, comme les probabilités sont à valeur dans $[0,1]$, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \le \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right).$$

On remarque que $\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)_N$ est une suite décroissante d'ensemble de limite $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$. On obtient ainsi en passant à la limite

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

. □

Proposition 4.9

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de tribus indépendantes. Soient $N \ge 1$ un entier et $(I_k)_{k=1}^{N}$ une partition finie de $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{1, .., N\}$, on définit

$$\mathcal{G}_k = \sigma\left(\bigcup_{i\in I_k} \mathcal{F}_i\right).$$

Alors les tribus $(\mathcal{G}_k)_{k=1}^{N}$ sont indépendantes.

Preuve : Exercice. □

III Variables aléatoires

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Définition 4.10 Les fonctions de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mesurables s'appelle des **variables aléatoires** ou **v.a.** en abrégé. Si $d > 1$, on parle aussi de **vecteurs aléatoires**.

Remarque : Les éléments de l'univers Ω se note souvent ω et sont appelés des réalisations. On notes généralement les v.a. avec des majuscules : X, Y,... et les valeurs prises par les v.a. avec des minuscules. Par exemple $X(\omega) = x$.

Si X est une variable aléatoire, on remarque que l'ensemble

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

est toujours mesurable. Cet évènement se note en abrégé $\{X \in B\}$. Le probabilité de cet évènement s'abrège encore avec la notation

$$\mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}(\{X \in B\}) := \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}\right).$$

Définition 4.11 Si X est une v.a., on appelle **loi de** X la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, notée $\mathbb{P}_X$. Autrement dit, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. C'est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Remarque : Vocabulaire : si p est la loi de X on dit que X suit la loi p et on note cette relation $X \rightsquigarrow p$ et également $\mathscr{L}(X) = p$. Si Si deux variables aléatoires X et Y ont même loi, i.e. si $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(Y)$, i.e. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ on le note $X \sim Y$. C'est une relation d'équivalence.

Définition 4.12

1. Si X est une v.a. telle que $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(-X)$, on dit que X est symétrique.
2. Si X et Y sont deux v.a. telles que $X = Y$ p.s. alors ont dit que Y est une version de X (et vice-versa).

Remarque : Si les v.a. X et Y sont des versions l'une de l'autre alors elles ont même loi.

Définition 4.13 Soit X une v.a. à valeur dans $\mathbb{R}$ on définit la **fonction de répartition** $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de X par

$$F_X(t) := \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) := \mathbb{P}(X \leq t).$$

C'est une fonction croissante donc mesurable qui vérifie

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$$
$$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1.$$

1 Variables aléatoires discrètes

Définition 4.14 Une v.a. X est dite **discrète** si elle prend presque sûrement ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable, c'est-à-dire s'il existe un ensemble dénombrable $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbb{P}(X \in F) = 1$.

Remarque : On peut noter alors, $F := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs prises par X. Dans ce cas, $\sigma(X)$ est la tribu engendrée par la partition $\{\{X = x_k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ de Ω. La loi de X est alors une mesure de probabilité discrète de la forme

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \delta_{x_k}$$

où $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$\mathbb{P}_X(B) = \sum_{k \mid x_k \in B} p_k \text{ pour tout } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

2 Variables aléatoires à densité

Définition 4.15 Une v.a. X est dite **à densité** (ou absolument continue ou continue) si sa loi $\mathcal{P}_X$ est une loi à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est-à-dire s'il existe $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne positive telle que

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f \mathrm{d}\lambda_d, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Une telle fonction f, est appelée **densité** de X.

Remarque : Si la v.a. est à densité f_X sur $\mathbb{R}$ alors, F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'_X = f_X$.

3 Loi jointe et lois marginales

Proposition 4.16

Une fonction $X = (X_1, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire si et seulement si chaque $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une v.a.

Preuve : Exercice. □

Comme les mesures sur les espaces produits sont entièrement déterminées par la donnée de leurs valeurs sur les pavés mesurables, il suffit, pour spécifier la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, de connaître

$$\mathbb{P}_X(B_1 \times ... \times B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n), \qquad \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On peut même se contenter de connaître ces valeurs pour des B_i pavés (i.e. des produits d'intervalles).

Définition 4.17 Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $(E_1 \times ... \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{E}_n)$.

1. La loi de X est également appelée **loi jointe** de $(X_1, ..., X_n)$ (l'ordre compte), ou encore **vraisemblance** de $(X_1, ..., X_n)$, en particulier en statistique lorsque ce vecteur est un échantillon de variable aléatoire.
2. Les **lois marginales** de X sont les lois des r-uplets $(X_{i_1}, ..., X_{i_r})$ pour tout entier r compris entre 1 et n et pour tout ensemble de r indices distincts i_1,...,i_r de $\{1, .., n\}$.

Remarque : La loi de $X' = (X_{i_1}, ..., X_{i_r})$ peut s'obtenir comme marge de la loi de X. Pour cela, il suffit de considérer l'application c de E sur $E_{i_1} \times ... \times E_{i_r}$ qui à un vecteur de E associe le vecteur de ses composantes dans $E_{i_1} \times ... \times E_{i_r}$. Alors $\mathbb{P}_{X'} = \mathbb{P}_X \circ c^{-1}$.

On peut donc déduire de la loi de X les lois de ses composantes. Mais en général, la réciproque n'est pas vraie : étant données les lois des composantes d'un vecteur, on ne peut déduire la loi du vecteur. Il faut connaître la nature des interactions entre les variables. C'est le cas par exemple lorsque les variables sont indépendantes.

4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 4.18 Soient X_1, ..., X_n des v.a. à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$. On dit qu'elles sont **indépendantes** si $\sigma(X_1)$, ,..., $\sigma(X_n)$ sont des sous-tribus indépendantes, c'est-à-dire si

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i) \quad \forall B_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}_n.$$

Autrement dit, $\mathbb{P}_{(X_1,...,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}_{X_n}$. Donc les variables aléatoires qui composent un vecteur aléatoire sont indépendantes si la loi du vecteur est le produit (de mesure) des lois des variables.

Lorsque l'on connaît la loi d'une variable aléatoire, on peut en déduire la loi de toute image mesurable de cette variable.

Proposition 4.19

Soient X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ de loi $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{E})$ et ψ une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(E', \mathcal{E}')$ alors la variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par $Y = \psi(X)$ a pour loi sur $(E', \mathcal{E}')$ la loi image de $\mathbb{P}_X$ par ψ, $\mathbb{P}_X \circ \psi^{-1}$.

Preuve : En effet, pour tout $B' \in \mathcal{E}'$,

$$\mathbb{P}_Y(B') = \mathbb{P}(\psi(X) \in B') = \mathbb{P}(X \in \psi^{-1}(B')) = \mathbb{P}_X(\psi^{-1}(B')) = \mathbb{P}_X \circ \psi^{-1}(B').$$

□

En particulier, on a le résultat suivant sur la loi de la somme de variables aléatoires indépendantes qui découle de la définition de la convolution des mesures sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 4.20

Soient X_1,..., X_n des vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\mathbb{P}_{X_1+...+X_n} = \mathbb{P}_{X_1} \star ... \star \mathbb{P}_{X_n}.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition ci-dessus à la loi $\mathbb{P}_{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}_{X_n}$ de $(X_,..., X_n)$ et la fonction $\psi : (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$. □

Au passage, on a montré le résultat suivant :

Corollaire 4.21

La convolution de probabilités est une probabilité.

IV Espérance

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 4.22 Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si X est positive ou $\mathbb{P}$-intégrable, on appelle **espérance de** X la quantité

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Proposition 4.23 (*Propriétés*)

Soient X et Y deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, intégrables sur Ω.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Si $X = a$ p.s. alors $\mathbb{E}[X] = a$.*
2. *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$.*
3. *Si X v.a.r. est telle que $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$.*
4. *Si X, Y v.a.r. indépendantes, alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.*

Proposition 4.24 (*Formule de transfert*)

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathbb{P}_X$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^d} x \, d\mathbb{P}_X(x).$$

Plus généralement, pour toute fonction borélienne $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$, si $\varphi(X)$ est $\mathbb{P}$-intégrable, alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mathbb{P}_X.$$

Remarque : Si X est une v.a. discrète, de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_{x_n}$ alors l'application de la formule te transfert donne

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^d} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_k x_k$$

et plus généralement

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_k \varphi(x_k).$$

Remarque : Si X est une v.a. de densité f, alors l'application de la formule te transfert donne

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^d} x \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} x f(x) \,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

et plus généralement

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi f \,\mathrm{d}\lambda_d.$$

Définition 4.25 Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $|X|^k$, est intégrable, on appelle moment d'ordre k de X la valeur $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ et moment centré d'ordre k de X la quantité $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^k\right]$.

Théorème 4.26 (*Caractérisation de la loi d'un vecteur aléatoire*)

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. La loi de X est caractérisée par la donnée des $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne bornée.

Preuve : On remarque que pour toute fonction borélienne bornée φ, $\varphi(X)$ est intégrable. On suppose la loi de X connue. Alors $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ est donnée par la formule de transfert. Réciproquement, si toutes les espérances sont connues alors il suffit de choisir les $\varphi = \mathbf{1}_B$ pour B borélien de $\mathbb{R}^d$ pour calculer $\mathbb{P}_X(B)$. □

Le résultat suivant donne la densité de la somme de v.a. indépendantes admettant des densités.

Théorème 4.27

Soient X_1,..., X_n n vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si X_1, ..., X_n ont respectivement pour densité f_1,..., f_n alors $X_1 + ... + X_n$ a pour densité $f_1 \star ... \star f_n$.

Proposition 4.28 (*Inégalité de Jensen*)

Soit X une v.a.r. à valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit ψ une fonction convexe sur I. Si X et $\psi(X)$ sont intégrables alors

$$\psi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\psi(X)].$$

L'inégalité est stricte si ψ est strictement convexe et X non égale à une constante presque sûrement.

Preuve : Comme ψ est convexe, on a la proposition suivante : pour tout $z \in I$, il existe $\lambda_z \in \mathbb{R}$ tel que (faire un dessin) $\psi(x) \geq \psi(z) + \lambda_z(x - z)$ pour tout $x \in I$. On l'applique à $z = \mathbb{E}[X] \in I$ et à $x = X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Il vient $\psi(X(\omega)) \geq \psi(\mathbb{E}[X]) + \lambda_z(X(\omega) - \mathbb{E}[X])$ pour tout $\omega \in \Omega$. On intègre alors sur Ω et on conclut en remarquant que l'intégrale sur Ω vaut 1 et qu'elle est linéaire. □

Corollaire 4.29

Soit X un v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- *Si X est intégrable, alors $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.*
- *Si X^2 est intégrable, alors $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right])$.*
- *Si e^X est intégrable, alors $e^{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}\left[e^X\right]$.*

V Matrice de covariance

Définition 4.30 Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire. On suppose que toutes les composantes sont de carré intégrable (on dit alors que X est de carré intégrable). On définit la **matrice de covariance** de X par

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T\right].$$

Proposition 4.31 (*Propriété de la matrice de covariance*)

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable et $a \in \mathbb{R}^d$.

1. $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X] = \mathbb{E}\left[XX^T\right] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]^T$.
2. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X + a] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[X]$.*
3. *La matrice $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X]$ est symétrique, semi-définie-positive.*
4. *Si X est un vecteur de v.a. indépendantes, alors $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X]$ est diagonale.*

Preuve : Faire les deux premiers points en exercice. Dans le troisième, la symétrie est évidente. Pour le dernier point, soit $u \in \mathbb{R}^d$. On doit montrer que $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X]u \cdot u \geq 0$, où le point désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. On pose $Y = X - \mathbb{E}[X]$. Il vient $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X] = \mathbb{E}\left[YY^T\right]$ et

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[X]u \cdot u = \mathbb{E}\left[YY^T\right]u \cdot u = u^T\mathbb{E}\left[YY^T\right]u = \mathbb{E}\left[(Y^Tu)^TY^Tu\right] = \mathbb{E}\left[|Y^Tu|^2\right] \geq 0.$$

□

Proposition 4.32

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d'}$ et soit b un vecteur de $\mathbb{R}^{d'}$. On suppose X de carré intégrable. Alors $AX + b$ est de carré intégrable et

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[AX + b] = A\mathbb{C}\mathrm{ov}[X]A^T.$$

Cette proposition est à démontrer pour s'entraîner, tout comme la remarque suivante.

Remarque : Si les composantes d'un vecteur aléatoire sont décorrélées ou indépendantes, la matrice de covariance du vecteur est diagonale.

Définition 4.33 [Covariance de deux vecteurs] Soient X et Y deux vecteurs aléatoires de carré intégrable, $X \in \mathbb{R}^d$ et $Y \in \mathbb{R}^{d'}$. La matrice de covariance de X est Y est définie par

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[X, Y\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])(Y - \mathbb{E}\left[Y\right])^T\right] \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Remarque :

1. Attention à la confusion, la notation $\mathbb{C}\mathrm{ov}$ est utilisée indistinctement pour les vecteurs ou les couples de vecteurs. Ici, on doit lire $\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[X\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[X, X\right]$ $(= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[X\right])$.
2. Tout matrice de taille $d\times d'$ est la matrice de covariance de deux vecteurs aléatoires de tailles d et d' respectivement. Pour qu'une matrice Γ de taille $d \times d$ soit la covariance d'un (seul) vecteur X de $\mathbb{R}^d$, il faut et il suffit que Γ soit positive et symétrique.

Proposition 4.34

Sous les hypothèses de la définition 4.33, on a :

1. $\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[X, Y\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y, X\right]^T$.

2. Si $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *alors* $\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Z\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[X\right] & \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[X, Y\right] \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y, X\right] & \Gamma_Y \end{pmatrix}$.

VI Exercices

Dans ces exercices, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Exercice 1. Evénements négligeables et indépendance. Soient$A, B \in \mathcal{F}$. Dire si les huit implications suivantes sont vraies ou fausses :

1. A et B incompatibles $\Leftrightarrow$ A et B indépendants.

2. A est presque certain $\Leftrightarrow$ A est indépendant de lui-même.

3. A est négligeable $\Leftrightarrow$ A est indépendant de tout événement.

4. A et B sont indépendants et incompatibles $\Leftrightarrow$ A ou B est négligeable.

Exercice 2. Indépendance deux à deux. On lance un pièce deux fois de manière indépendante. On note $X \in \{0, 1\}$ le résultat du premier lancé et $Y \in \{0, 1\}$ le résultat du second. On considère trois événements : $A = \{X = 0\}$, $B = \{Y = 1\}$, $C = \{X = Y\}$. Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas indépendants.

Exercice 3. Jeu de dé. On lance un dé à six faces sans s'arrêter. Proposer une modélisation probabiliste de cette expérience. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : on obtient que des 6, B : on obtient que des 6 à partir d'un certain rang, C : on obtient au moins un 6, D : on obtient une infinité de 6.

Exercice 4. Trouver deux intervalles indépendants pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Exercice 5. Critère d'indépendance. Soit deux ensembles d'évènements $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. On suppose que

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

1. Soit $B \in \mathcal{B}$, montrer que $p_1(A) := \mathbb{P}(A \cap B)$ et $p_2(A) := \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ définissent deux mesures sur $\mathcal{F}$ qui coïncident sur $\mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{T} := \{ A \in \mathcal{F} \mid p_1(A) = p_2(A)\}$ est une tribu.

2. En déduire que

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{A}),\ \forall B \in \mathcal{B}, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

3. Montrer que les tribus $\sigma(\mathcal{A})$ et $\sigma(\mathcal{B})$ sont indépendantes.

4. Soient X, Y deux v.a. réelles. Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}(X \leq t \text{ et } Y \leq u) = \mathbb{P}(X \leq t)\mathbb{P}(Y \leq u).$$

Exercice 6. Limite et indépendance. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que si (A_n) est croissante, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

2. Montrer que si (A_n) est décroissante, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

On suppose dans la suite que (A_n) est décroissante et on note $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n et B sont indépendants.

3. Montrer que A et B sont indépendants.

4. Soit (X_n) un suite croissante de v.a. réelle et Y une v.a. réelle telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y soient indépendantes. Montrer que $X := \lim_{n\to+\infty} X_n$ et Y sont indépendantes.

Exercice 7. Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.

1. Soit X une v.a.r intégrable positive, montrer que

$$\mathbb{P}(X > k) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{k}, \quad \forall k > 0.$$

2. Soit X une v.a.r de carré intégrable. On définit $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$. Montrer en utilisant l'inégalité précédente que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > k) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{k^2} \text{ pour tout } k > 0.$$

Exercice 8. Sommes de v.a. discrètes 1. On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi de Bernoulli $\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. On cherche la loi de la somme

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{2^n}.$$

On note F_S la fonction de répartition de S.

1. Justifier que $S(\Omega) = [0, 1]$.

2. Montrer que pour tout $t \leq 0$ $F_S(t) = 0$ et pour tout $t \geq 1$, $F_S(t) = 1$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_S(t) = \mathbb{P}\left(X_1 + \sum_{n\geq 1} \frac{X_{n+1}}{2^n} \leq 2t \right).$$

En déduire que $F_S(t) = \frac{1}{2}F_S(2t) + \frac{1}{2}F_S(2t-1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $F_S(t) = t$. Quel est la loi de S ? *On pourra commencer par montrer la propriété pour les réels de la forme $k2^{-n} \in [0, 1]$.*

Exercice 9. Union d'évènements indépendants

1. Soient A, B, C trois évènements indépendants. Montrer que $A \cup B$ et C sont indépendants.

2. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_m$ sont des évènements indépendants, alors les évènements

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{et} \quad B := \bigcup_{k=i}^{m} B_i$$

sont indépendants. *Ce résultat se généralise à un nombre dénombrable de réunions finies.*

3. Un ordinateur sort une suite de lettre infinie aléatoire uniforme parmi les 26 lettres de l'alphabet. Calculer la probabilité de voir apparaitre l'alphabet dans l'ordre dans cette suite.

Exercice 10. Somme de v.a. discrètes 2. On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi de Bernoulli $\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. On cherche la loi de la somme

$$T = \sum_{n\geq 1} \frac{2X_n}{3^n}.$$

On note l'ensemble image $T(\Omega) := \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \{0,1\} \right\}$.

1. Montrer que la loi de T n'a pas d'atome, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(T = x) = 0$. En particulier, T ne suit pas un loi discrète.

2. Prouver que $T(\Omega)$ n'est pas dénombrable.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$C_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{2x_k}{3^k} + \frac{y}{3^n} \;\middle|\; \forall k,\ x_k \in \{0,1\} \text{ et } y \in [0,1] \right\}.$$

3. Montrer que la suite C_n vérifie les propriétés suivantes : pour tout $n \geq 1$

1. C_n est un borélien,
2. $C_n \subset [0,1]$,
3. $C_{n+1} \subset C_n$,
4. $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$.

On note alors $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$. C'est l'ensemble de Cantor.

4. Prouver que $T(\Omega) = C$. En déduite que $T(\Omega)$ est λ-négligeable.

5. Montrer que T n'est pas une variable aléatoire à densité.

Exercice 11. Loi de la transformée linéaire d'un vecteur.

1. Soit X un vecteur aléatoire de dimension n, de densité f. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une application linéaire inversible et $Y = AX$ un vecteur aléatoire. Déterminer la densité de Y.

2. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de densité f. Déduire de la question précédente la densité du vecteur $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, quelle forme prend la densité de $X_1 + X_2$?

Exercice 12. Coordonnées polaires. Soient X et Y deux v.a. de densité jointe f. Soient R et Θ les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes (X, Y).

1. Déterminer la densité jointe de (R, Θ).

2. On suppose que (X, Y) suit la loi $\mathcal{N}_2(0, \sigma^2 I_2)$. Déterminer la loi de R et celle de Θ. Ces v.a. sont elles indépendantes ?

Exercice 13. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, pour $1 \leq k \leq n$. Calculer la densité du vecteur $(S_1, S_2, \dots, S_n)$.

Exercice 14. Loi du quotient de deux variables Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de dimension 2, de densité f. On pose $U = X/Y$.

1. Vérifier que U est bien définie.
2. Calculer la densité de U en fonction de f.
3. Quelle est la loi de U si X et Y sont deux lois $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes ?

Exercice 15. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, montrer que si A_1,..., A_n sont n événements, on a la formule du crible (ou formule de Poincaré) suivante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \mathcal{P}_k(n)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

où $\mathcal{P}_k(n)$ est l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

Exercice 16. Combinaison convexe de probabilités.

1. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs de somme égale à 1. Montrer que l'application

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \geq 1} a_n \mathbb{P}_n(A), \;\; A \in \mathcal{F},$$

est une probabilité.

2. Soit Ω un ensemble dénombrable.

- **a.** Montrer que $A \mapsto \mathrm{card}(A)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- **b.** Soit $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ une partition de Ω. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}, 0 < \mathrm{card}(B_i) < +\infty$. Soit alors p l'application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$p(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \frac{\mathrm{card}(B_i \bigcap A)}{\mathrm{card}(B_i)}.$$

  Montrer que sous les conditions de la question 1, p est une probabilité.

3. Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}^n$. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$, on note

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \geq 1} a_k \mathbf{1}_A(x_k) = \sum_{k \geq 1} a_k \delta_{x_k}(A).$$

Montrer que sous les conditions du 1., $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Exercice 17. Restriction des tribus et de probabilités. Soit $A \subset \Omega$.

1. Montrer que $\mathcal{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur A.

2. Montrer que si $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_A$ est incluse dans $\mathcal{F}$. Donner une condition pour que la restriction de $\mathbb{P}$ à $(A, \mathcal{F}_A)$ soit une probabilité.

Exercice 18. Indépendance. Soient X et Y deux v.a. indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de lois respectives $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_{(Y,X)}$.

Exercice 19. CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE. Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre q. On définit les ensembles

$$A_1 = \{X_1 < X_2\}, \quad A_2 = \{X_2 < X_1\}, \quad H = \{X_1 \neq X_2\}.$$

On considère les v.a

$$X = \min(X_1, X_2) \text{ et } J = \mathbf{1}_{A_1} + 2\mathbf{1}_{A_2}$$

On note $\mathbb{P}^H$ la probabilité conditionnelle définie par $\mathbb{P}^H(A) = \mathbb{P}(A|H)$.

1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}(H \cap \{J = 1\} \cap \{X > k\})$.

2. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$ et en déduire $\mathbb{P}(H)$.

3. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de la probabilité $\mathbb{P}^H[(J = 1) \cap (X > k)]$.

4. Que vaut alors $\mathbb{P}^H[(J = 1)]$?

5. On étudie une propriété d'indépendance des v.a X et J sous la probabilité $\mathbb{P}^H$.

6. Remarquer que l'on a l'égalité

$$\mathbb{P}(H \cap (J = 1) \cap (X > k)) = \mathbb{P}(H \cap (J = 2) \cap (X > k))$$

et en déduire de ce qui précède la valeur de la probabilité de $\mathbb{P}^H(X > k)$.

7. Montrer que les v.a. X et J sont indépendantes lorsqu'on les considère comme définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^H)$.

Exercice 20. MÉLANGE DE LOIS. Soit $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (1 + x)/5 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ (3 + x)/10 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 3x/10 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } 3 \leq x. \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2. Déterminer les atomes de P.

3. Décomposer F en combinaison convexe d'une fonction de répartition d'une loi absolument continue et d'une fonction de répartition d'une loi discrète.

4. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de loi P.

Exercice 21. Soit X une v.a. positive de carré intégrable. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}[X]) \leq (1 - \lambda^2) \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}, \qquad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Exercice 22. Une machine comporte deux composants de durée de vie T_1 et T_2 de densité jointe

$$f_{(T_1,T_2)}(x, y) = 2e^{-(x+2y)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y).$$

1. Calculer les densités marginales.

2. On suppose que les deux composants sont montés en parallèle. La durée de vie du système est donnée par $T' = \max(T_1, T_2)$. Déterminer sa fonction de répartition. Calculer le temps moyen de panne.

3. Même question pour un système monté en série en considérant $T = \min(T_1, T_2)$.

Exercice 23. EXEMPLE DE CHANGEMENT DE VARIABLE. Soit X une v.a.r. On définit Y comme la partie entière de X notée $\lfloor X \rfloor$. Ecrire la loi de Y en fonction de celle de X.

Exercice 24. Montrer en utilisant le théorème 4.26 que si X est une v.a.r de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors X^2 suit une loi de χ_1^2 et que si X est une loi de Bernouilli, X^2 aussi.

Exercice 25. VARIANTE DU CALCUL DES MOMENTS. Soit X une v.a. positive

1. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ tel que $\mathbb{E}[X^p]$ est finie,

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_{\mathbb{R}+} pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t.$$

2. On suppose X intégrable. Déduire de la question 1 que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t.$$

En déduire alors que

3. Si X est entière $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X > n)$.

4. (Cas général) $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X > n+1) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X > n)$.

Exercice 26. Soit X une v.a.r de variance finie σ^2. Montrer que pour $k > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 27. SOMME DE V.A. INDÉPENDANTES. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2. Montrer que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Exercice 28. On définit

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où ρ est un réel tel que $-1 < \rho < 1$. Soit $X = (X_1, X_2)^T$ un vecteur gaussien centré de matrice de variance Γ. On pose $Y = (\langle U, X\rangle \ \langle V, Y\rangle)^T$.

1. Montrer que Y est un vecteur gaussien dont on précisera la loi.

2. Les variables aléatoires $\langle U, X\rangle$ et $\langle V, X\rangle$ sont-elles indépendantes ?

3. De manière générale, soient $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

- **a)** Quelle est la loi de $\langle U, X\rangle$?
- **b)** Montrer que $\begin{pmatrix} \langle U, X\rangle \\ \langle V, X\rangle \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.
- **c)** Quelle est la covariance de $\langle U, X\rangle$ et $\langle V, X\rangle$?
- **d)** A quelle condition nécessaire et suffisante les variables $\langle U, X\rangle$ et $\langle V, X\rangle$ sont-elles indépendantes ?
- **e)** Donner un exemple de vecteurs U et V tels que $\langle U, X\rangle$ et $\langle V, X\rangle$ soient des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 29. FONCTIONS D'UN VECTEUR GAUSSIEN. Soient $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{\pm 1\}$ et $X = (X_0, ..., X_d)'$ un $(d+1)$-vecteur gaussien tel que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ pour tout i et

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\,[X] = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & a & a & \dots & \dots & a \\ a & 1 & a^2 & \dots & \dots & a^2 \\ a & a^2 & 1 & a^2 & & a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & & a^2 & 1 & a^2 \\ a & a^2 & \dots & \dots & a^2 & 1 \end{array} \right\}$$

1. Soit $Y = (X_0, Y_1, ..., Y_d)'$ tel que

$$X_i = aX_0 + \sqrt{1-a^2}Y_i, i = 1, \dots, d.$$

Déterminer la loi du vecteur aléatoire Y.

2. Exprimer X en fonction de Y.

3. Déterminer la loi de $S_d = (X_1 + \cdots + X_d)/d$, $d \geq 1$.

4. On pose $Z = S_d/X_0$. Déterminer la loi de $\sqrt{d}(Z-a)/\sqrt{1-a^2}$ et déduire celle de Z.

Exercice 30. Soit X un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une vecteur Y bi-dimensionnel centré réduit tel que $X = BY$ où B vérifie $BB' = \Gamma$.

Exercice 31. Soit (X_n) une suite aléatoire i.i.d. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que

1. $\sup_n X_n = +\infty$ p.s ou $\sup_n X_n < +\infty$ p.s.

2. $\dfrac{S_n}{n}$ diverge ou converge p.s.

Exercice 32. APPARITION D'UN TEXTE DANS UN CHAINE DE CARACTÈRE. On cherche la probabilité d'apparition d'une chaîne caractère fixéede longueur N dans une suite de caractères aléatoires et indépendants prise dans un alphabet de 32 caractères. On fixe donc un mot de longueur k avec l piles et $k-l$ faces. On note X_1, X_2, ... la chaine de caractères et pour tout $n \geq 1$ et A_n l'événement "le mot apparaît dans la séquence X_{n+1},...,X_{n+N}".

1. Calculer la probabilité de A_n.

2. Montrer que presque sûrement le mot fixé apparaît une infinité de fois.

Exercice 33. THÉORÈME DE SLUTSKY. On suppose que la suite de v.a. (X_n) converge en loi vers une v.a. X et que la suite (Y_n) converge en loi vers C, avec C constante presque sûrement.

1. Montrer que le couple $((X_n, Y_n))_n$ converge en loi vers (X, C).

2. En déduire que

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X + C, \qquad X_nY_n \xrightarrow{\mathscr{L}} XC, \qquad X_n/Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X/C, \qquad (si\ C \neq 0).$$

Exercice 34. Soit (X_n) une suite aléatoire i.i.d. de loi P de fonction caractéristique ϕ. Posons $Y_n = (X_n + Y_{n-1})/2$ pour tout $n \geq 1$, avec $Y_0 = X_0/2$.

1. Exprimer Y_n en fonction de X_i pour $0 \leq i \leq n$.

2. Calculer la fonction caractéristique ϕ_n de Y_n en fonction de ϕ et de n.

3. Etudier la convergence en loi de la suite (Y_n) lorsque P est la loi de Cauchy $\mathcal{C}s(1)$.

4. Etudier la convergence de $(\sum_{i=1}^n X_i/n)$ et $(\sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n})_n$ pour la loi P ci-dessus.

Chapitre 5

Espaces de Lebesgue

Sommaire

Les espaces L^p ou espaces de Lebesgue sont d'une importance capitale en analyse et en probabilité. Ce sont des espaces très généraux de classes de fonctions ou de variables aléatoires à valeurs réelles ou complexes, possédant une structure d'espace vectoriel normé complet (espace de Banach). Ils sont à la base notamment des espaces de Sobolev qui sont fondamentaux pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Généralement, en analyse, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et μ est la mesure de Lebesgue ; en probabilité, Ω est l'univers et μ est une mesure de probabilité.

On rappelle la définition de l'espace vectoriel des fonctions mesurables intégrables

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \;\middle|\; \int_\Omega |u| \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

L'idée d'en faire un espace vectoriel normé se heurte à une difficulté importante : la notion d'égalité presque partout. En effet si deux fonctions sont égales presque partout (i.e. sauf sur un ensemble de mesure nulle), alors elles ont le même comportement vis-à-vis de l'intégration. En particulier, si u est une fonction intégrable non nulle mais telle que $u = 0$ p.p., alors

$$u = 0 \text{ p.p.} \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega |u| \mathrm{d}\mu = 0$$

et donc l'application $f \mapsto \int |f| \mathrm{d}\mu$ ne peut pas être une norme car elle ne vérifie pas la propriété de séparation. Pour créer une structure d'e.v.n. à partir de l'espace $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, nous allons devoir quotienter. Cette idée fondamentale consiste à regrouper les fonctions qui sont égales presque partout dans une même classe puis considérer l'ensemble des classes. On parle alors d'espace quotient.

I Classes d'équivalence et espace quotient

Définition 5.1 Une relation binaire $\sim$ sur un ensemble X est appelée **relation d'équivalence** si elle est

1. réflexive : $\forall x \in X \quad x \sim x$,
2. symétrique : $\forall x, y \in X \quad x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x$,
3. transitive : $\forall x, y, z \in X \quad x \sim y$ et $y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z$.

On appelle **classe d'équivalence** d'un élément $x \in X$, l'ensemble $\widetilde{x} \subset X$ des éléments équivalents à x. L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de X. L'ensemble des classes est noté $X/_\sim$ s'appelle **l'espace quotient** de X par la relation $\sim$. Tout élément d'une classe est appelé **représentant** de cette classe.

Exemple : On note la fonction signe sgn définie par $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ pour $x \neq 0$ et $\operatorname{sgn}(0) = 0$. La relation $x \sim y$ ssi $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Les trois classes sont $]-\infty, 0[$, $\{0\}$ et $]0, +\infty[$.

Exemple : La relation sur $\mathbb{R}$, $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence dont l'ensemble des classes est donnée par $\mathbb{R}/_\sim = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in [0, 1[\}$.

Exemple : Soit E un e.v. et F un s.e.v. de E. La relation $x \sim y$ ssi $x - y \in F$ est une relation d'équivalence sur E. Les classes sont les $x + F$, $x \in E$.

Définition 5.2 Soit E un e.v. et F un s.e.v. de E. L'ensemble quotient $E/_\sim$ par la relation $x \sim x$ si et seulement si $x - y \in F$ se note E/F. Cet ensemble peut être muni d'une structure d'espace vectoriel canoniquement issue de celle de E.

On définit l'addition des classes par $\widetilde{u} + \widetilde{v} := \widetilde{u + v}$ et le produit extérieur par $\alpha\, \widetilde{u} := \widetilde{\alpha v}$ pour tout $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ces définitions ont bien un sens car elles ne dépendent pas des représentants choisis. L'espace vectoriel E/F ainsi formé est appelé **espace vectoriel quotient** de E par F.

II Définition des espaces de Lebesgue

On note $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur Ω. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on rappelle la définition des espaces de fonction p-intégrable :

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}) \;\middle|\; \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Ce sont des espaces vectoriels. Par ailleurs, ils contiennent tous le s.e.v. $\mathcal{N}$ des fonctions nulle presque partout. On va donc quotienter les espaces $\mathscr{L}^p$ par $\mathcal{N}$ pour ainsi regrouper toutes les fonctions égales presque partout dans des classes.

Définition 5.3 Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)/\mathcal{N}$$

l'espace vectoriel quotient de $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ par le sous espace vectoriel $\mathcal{N}$ des fonctions nulles presque partout. Pour toute classe $\widetilde{u} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, la quantité

$$\|\widetilde{u}\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

est bien définie car ne dépend pas du représentant choisi.

On définit également l'espace vectoriel des fonction mesurables bornées presque partout par

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu) := \{u \in \mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F}) \mid \exists C \geq 0,\ |u| \leq C\ \mu - \text{p.p.}\}$$

Définition 5.4 On définit

$$L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu) := \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)/\mathcal{N}$$

l'espace vectoriel quotient de $\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ par $\mathcal{N}$. Pour toute classe $\widetilde{u} \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, la quantité

$$\|\widetilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C \geq 0,\ |u| \leq C\ \mu - \text{p.p.}\}.$$

est bien définie car ne dépend pas du représentant choisi. Cette quantité s'appelle également le sup essentiel de u.

Remarque : Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la tribu $\mathcal{F}$ et la mesure μ utilisée, on utilise la notation condensée $L^p(\Omega)$. Si Ω est un intervalle ouvert $\Omega :=]a,b[$ de $\mathbb{R}$, on utilise souvent la notation $L^p(a,b)$.

Remarque : Les espaces $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ ainsi définis sont bien des espaces de classes de fonctions. Pour alléger les notations, on notera le plus souvent de la même façon une classe et l'un de ses représentants. La classe de u notée $\widetilde{u}$ se notera ainsi u. On parlera aussi de *fonctions de L^p* au lieu de *classe de fonctions de L^p*. Cela n'a pas de conséquence si l'on utilise l'un ou l'autre dans un calcul intégral. Cela n'a pas non plus de conséquence lorsque l'on raisonne avec la notion de *presque partout*. En revanche nous ne sommes pas autorisés à évaluer ponctuellement une telle fonction. On retiendra que faire une évaluation ponctuelle de fonction de L^p est interdit sauf si l'on précise un représentant particulier de la classe.

Remarque : On peut en pratique manipuler les classes de fonctions de $L^p(\Omega)$ comme des fonctions. Le principe est que toutes les opérations classiques (non ponctuelles) sur les fonctions s'étendent naturellement aux classes de fonctions.

Exemple : Si $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est un espace probabilisé, l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est l'espace des classes) de v.a.r. de carré intégrable.

Exemple : Les espaces de suites de puissances sommables $\ell^p(\mathbb{N})$ pour $p \in [1,+\infty]$ sont des espaces de Lebesgue particuliers. On pose $\Omega = \mathbb{N}$ que l'on munit de la tribu discrète $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage κ, et on pose $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathcal{N}),\kappa)$.

Si u et v sont deux fonctions mesurables, on peut définir le produit de leurs classes d'équivalences par $\widetilde{u}\,\widetilde{v} := \widetilde{u\,v}$. En effet, la classe $\widetilde{u\,v}$ ne dépend pas des représentants u et v choisis. On s'intéresse alors aux produits de classes de fonctions de L^p.

Proposition 5.5 (*Inégalité de Hölder*)

Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^r(\Omega)$ et on a

$$\|uv\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Cette inégalité se généralise pour des produits de plus de deux fonctions : Soit $p_1, \ldots, p_n, r \in [1, +\infty]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r},$$

si pour tout i, $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, alors $u_1 u_2 \ldots u_n \in L^r(\Omega)$ et on a

$$\|u_1 u_2 \ldots u_n\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Preuve : (Cas $r = 1, p < +\infty, q < +\infty$). On commence par montrer une inégalité bien pratique : si $p, q \in [1, +\infty[$ sont les que $1/p + 1/q = 1$, alors

$$\forall a, b \geq 0, \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \text{(Young)}$$

Si $ab = 0$ c'est direct. Sinon on pose $s = p \ln a$ et $t = q \ln b$. On a $ab = \exp\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right)$. Comme exp est une fonction convexe et que $1/p + 1/q = 1$, on a

$$ab = \exp\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

On revient à Hölder. Si $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|v\|_{L^q(\Omega)} = 0$ c'est direct. On suppose que ce n'est pas le cas et on pose $U = u / \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ et $V = v / \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$. On a

$$|UV| \leq \frac{|U|^p}{p} + \frac{|V|^q}{q}.$$

En intégrant sur Ω, il vient

$$\|UV\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{p} \|U\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|U\|_{L^q(\Omega)}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ainsi,

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \|UV\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

(Cas $r > 1, p < +\infty, q < +\infty$). On ce ramène au cas précédent en remarquant que si on pose $p' = p/r$, $q' = q/r$, alors $u^r \in L^{p'}(\Omega)$ et $v^r \in L^{q'}(\Omega)$ et $1/p' + 1/q' = 1$. Donc

$u^r v^r \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\begin{aligned}
\|(uv)^r\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u^r\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v^r\|_{L^{q'}(\Omega)} \\
\int_\Omega |uv|^r &\leq \left(\int_\Omega |u|^{rp'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |u|^{rq'}\right)^{\frac{1}{q'}} \\
\|uv\|^r_{L^r(\Omega)} &\leq \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega |u|^q\right)^{\frac{r}{q}} \\
\|uv\|^r_{L^r(\Omega)} &\leq \|u\|^r_{L^p(\Omega)} \|v\|^r_{L^q(\Omega)} . \\
\|uv\|_{L^r(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Enfin le cas ou $p = +\infty$ ou $q = +\infty$ se traite facilement.
La généralisation à plus de deux fonctions se montre facilement par récurrence.

□

Remarque : Lorsque $r = 1, p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_\Omega u\, v\right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

Corollaire 5.6

Si Ω est de mesure finie, alors pour tout $1 \leq p \leq q \leq +\infty$,

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Preuve : Exercice. □

Théorème 5.7

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace vectoriel $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni de $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ est un espace vectoriel normé.

Preuve : Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ sont laissés en exercice. Pour $p \in]1, +\infty[$, l'homogénéité et la séparation se montrent facilement. Il reste à prouver l'inégalité triangulaire. Soient $u, v \in L^p(\Omega)$. En utilisant la convexité de $x \to |x|^p$ sur $\mathbb{R}$ pour $p \geq 1$, on a $|u+v|^p \leq 2^{p-1}(|u|^p + |v|^p)$ presque partout donc $u + v \in L^p(\Omega)$. On écrit alors

$$\|u+v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u+v|^p \leq \int_\Omega |u+v|^{p-1}(|u| + |v|) \leq \int_\Omega |u+v|^{p-1}|u| + \int_\Omega |u+v|^{p-1}|v|.$$

Or $|u+v|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ car $|u+v|^{(p-1)p'} = |u+v|^p$ donc par l'inégalité de Hölder,

$$\|u+v\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right) \left\||u+v|^{p-1}\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right) \|u+v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}$$

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} .$$

□

III Convergence dominée dans les espaces L^p

Théorème 5.8 (***Convergence p.p. + domination $\Rightarrow$ convergence L^p***)

Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$. Si

- *"$u_n \xrightarrow{p.p.} u$"*
- *il existe $v \in L^p(\Omega)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq v$ p.p. sur Ω,*

alors $u \in L^p(\Omega)$ et $u_n \overset{L^p(\Omega)}{\to} u$, c'est-à-dire $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$ quand n tend vers l'infini.

Preuve : C'est une conséquence du Théorème de convergence dominée. La suite $|u_n|^p$ converge p.p. vers $|u|^p$ est est dominée par v^p intégrable donc $|u|^p$ est intégrable et donc $u \in L^p(\Omega)$. Maintenant, on remarque que $|u_n - u|^p$ est une suite de fonctions intégrables qui converge p.p. vers 0 et qui est dominée par $2|v|^p$ intégrable donc en appliquant à nouveau le Théorème de convergence dominée on obtient que $\int_\Omega |u_n - u|^p \to 0$ c'est-à-dire $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. □

IV Produit de convolution

Proposition 5.9 (***Convolution et inégalité de Young***)

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q \geq 1$ et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Soit $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $v \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors la fonction $y \mapsto u(x-y)v(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. De plus, le produit de convolution $u \star v$ défini par

$$u \star v(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)dy, \quad \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}^d$$

est une fonction mesurable qui appartient à $L^r(\mathbb{R}^d)$ et qui vérifie

$$\|u \star v\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans le cas $r = +\infty$ alors $u \star v$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$ et est bornée par

$$|u \star v(x)| \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Preuve : Sans nuire à la généralité, on suppose que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$.

- Premier cas : $1 < p, q, r < +\infty$. Dans ce cas, $p, q > r$. Si u, v sont positives, alors $u \star v$ est bien définie et est aussi mesurable positive. On écrit pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$u \star v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u^{\frac{p}{r}}(x-y)v^{\frac{q}{r}}(y)u^{1-\frac{p}{r}}(x-y)v^{1-\frac{q}{r}}(y)\mathrm{d}y.$$

On pose alors $r_2 = \frac{rp}{r-p}$ et $r_3 = \frac{rq}{r-q}$. On remarque que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1$. En applicant Hölder sur le produit de trois fonctions, on obtient

$$\begin{aligned}
u \star v(x) &\leq \left\| u^{\frac{p}{r}}(x-.)v^{\frac{q}{r}} \right\|_{L^r} \left\| u^{\frac{p}{r_2}}(x-.) \right\|_{L^{r_2}} \left\| v^{\frac{q}{r_3}} \right\|_{L^{r_3}} \\
(u \star v)^r(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} u^p(x-y)v^q(y)\mathrm{d}y \, \|u\|_{L^p}^{\frac{r}{r_2}} \|v\|_{L^q}^{\frac{r}{r_3}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} u^p(x-y)v^q(y)\mathrm{d}y \\
\int_{\mathbb{R}^d} (u \star v)^r(x)\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u^p(x-y)v^q(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \\
\int_{\mathbb{R}^d} (u \star v)^r(x)\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u^p(x-y)\mathrm{d}x \right) v^q(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \\
\int_{\mathbb{R}^d} (u \star v)^r(x)\mathrm{d}x &\leq \|u\|_{L^p}^p \|v\|_{L^q}^q \leq 1.
\end{aligned}$$

Donc $u \star v \in L^r$ est on a l'inégalité demandée. Si u et v ne sont pas positive, le calcul précédent montre que $|u| \star |v| \in L^r$ et qu'ainsi cette fonction est finie presque partout. Ce qui implique que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)v(y)|\mathrm{d}y < +\infty.$$

donc $y \mapsto u(x-y)v(y)$ est intégrable p.p.t $x \in \mathbb{R}^d$. On reprend alors le calcul précédent.

- Deuxième cas : $r = +\infty$ i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On applique directement Hölder. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{R^d} |u(x-y)v(y)|\mathrm{d}y \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q} \leq 1.$$

Donc $y \mapsto u(x-y)v(y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $u \star v(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et bornée par 1. - Troisième cas : $q = 1$ (ou $p = 1$) dans ce cas $r = p$, on écrit simplement

$$\begin{aligned}
u \star v(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v^{\frac{1}{p}}(y)v^{1-\frac{1}{p}}(y)\mathrm{d}y \\
u \star v(x) &\leq \left\| u(x-.)v^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p} \left\| v^{\frac{1}{p'}} \right\|_{L^{p'}} = \left\| u(x-.)v^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p} \left\| v^{\frac{1}{p'}} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \leq \left\| u(x-.)v^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p} \\
(u \star v)^p(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u|^p(x-y)|v|(y)\mathrm{d}y \\
\int_{\mathbb{R}^d} (u \star v)^p(x)\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^p(x-y)|v|(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^1} = 1.
\end{aligned}$$

Donc $u \star v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et l'inégalité demandée est prouvée. □

Proposition 5.10 (*Propriétés algébriques*)

Le produit de convolution est bilinéaire, associatif et commutatif. Soit f, g, h trois fonctions d'espaces de Lebesgue et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

- $f \star (\alpha g + \beta h) = \alpha(f \star g) + \beta(f \star h)$,
- $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$,
- $f \star g = g \star f$,

dès lors que ces expressions sont bien définies.

Preuve : Exercice. □

Proposition 5.11 (***Continuité***)

Si $u \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty]$,alors $u \star v$ est défini partout sur $\mathbb{R}^d$ et $u \star v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et (x_n) une suite de $\mathbb{R}^d$ qui tend vers x. On pose $f(y) := u(x-y)v(y)$ et $f_n(y) = u(x_n - y)v(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. Comme u est continue, (f_n) cvs vers f. Comme u est a support compact, il existe $r > 0$ tel que $\text{supp}(u) \subset B(0, r)$. Par ailleurs, comme $x_n \to x$, il existe $R > 0$ tel que $x_n \in B(x, R)$ pour tout R. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{supp}(f_n) \subset B(x, R + r).$$

En effet si $|y - x| \geq R + r$, on a $r + R \leq |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq r + |x_n - y|$ donc $|x_n - y| \geq R$ donc $x_n - y \notin \text{supp}(u)$ et donc $f_n(y) = u(x_n - y)v(y) = 0$. Ainsi,

$$|f_n(y)| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}^d} |u|\right) |v|(y) \mathbf{1}_{B(x,R+r)}(y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Or la fonction $g := |v| \mathbf{1}_{B(x,R+r)}$ est intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}^d} g = \left\| v \mathbf{1}_{B(x,R+r)} \right\|_{L^1} \leq \|v\|_{L^p} \left\| 1_{B(x,R+r)} \right\|_{L^{p'}} \leq \lambda_d(B(x, R + r))^{1/p'} \|v\|_{L^p} < +\infty.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \to +\infty} u \star v(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mathrm{d}\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \to +\infty} f_n \mathrm{d}\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathrm{d}\lambda_d = u \star v(x).$$

□

Proposition 5.12 (***Dérivabilité***)

Pour tout $u \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le produit de convolution $u \star v$ appartient à $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et on a,

$$D^k(u \star v) = (D^k u) \star v$$

où D^k désigne le tenseur (d'ordre k) de toute les dérivées partielles d'ordre k.

Preuve : Par récurrence, il suffit de prouver que si $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$, alors $u \star v$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\nabla(u \star v) = (\nabla u) \star v$. On prouve ce résultat grâce can théorème de dérivation sous l'intégrale.

□

Proposition 5.13

Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ (resp. ν) a pour densité f (resp. g) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Alors $\mu \star \nu$ a pour densité $f \star g$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Preuve : Exercice. $\square$

En particulier, on a vu que la loi d'une somme de variables aléatoires réelles indépendantes est la convolution des lois de ces variables. On en déduit que la somme de variables réelles indépendantes admettant des densités par rapport à la mesure de Lebesgue admet elle-même une densité et que sa densité est la convolution des densités des variables sommées.

V Exercices

Exercice 1. Montrer que

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C \geq 0 \mid |u| \leq C \ \mu - \text{p.p.}\}$$

est une norme sur l'espace $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Exercice 2. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$. Comparer les espaces ℓ^p entre eux.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$). Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

1. Montrer que pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ on a $L^q \subset L^p$. Montrer que l'injection

$$\begin{aligned} I : L^q &\to L^p \\ u &\mapsto u \end{aligned}$$

est continue. *Dans ce cas, on écrit* $L^q \hookrightarrow L^p$.

2. Calculer la norme de cette injection dans $\mathscr{L}(L^q, L^p)$.

3. Montrer que si $\mu(\Omega) = +\infty$, les espaces L^p et L^q ne sont en général pas comparables.

Exercice 4. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$. Comparer les espaces ℓ^p entre eux.

Exercice 5. Soient $a, b \in [1, +\infty]$ avec $a < b$.

1. Soit $u \in L^a(\mathbb{R}) \cap L^b(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $p \in [a, b]$ on a

$$|u|^p \leq |u|^a + |u|^b$$

2. En déduire que $\{p \in [1, +\infty[\mid u \in L^p(\mathbb{R})\}$ est un intervalle.

3. Montrer que la fonction $p \mapsto \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$ est continue sur son domaine de définition.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty[$ et p' sont exposant conjugué. Soit $v \in L^{p'}(\Omega)$. On pose $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$Fu := \int_\Omega fg \mathrm{d}\mu$$

1. Montrer que F est linéaire continue et que $\|F\|_{\mathscr{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$

2. Montrer que $\|F\|_{\mathscr{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R})} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$. *On pourra considérer la fonction* $f = g|g|^{p'-2}$.

3. Montrer que l'espace $(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$.

Exercice 7. Intersection de L^p Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$. On note $X(\Omega) := \bigcap_{p\in[1,+\infty[} L^p(\Omega)$.

1. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, montrer que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

2. Pour $\Omega =]0,1[$, trouver une fonction de $f \in X(\Omega)$ qui n'est pas dans $L^\infty(\Omega)$.

3. Soit $f \in X(\Omega)$. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

Exercice 8. Transformée de Fourier. Pour tout fonction complexe u dans $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\mathcal{F}u$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et qu'elle est bornée.

2. Montrer que $\mathcal{F}u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

3. Montrer que $\lim_{\|\xi\|\to+\infty} \mathcal{F}u(\xi) = 0$.

4. Montrer que pour tout $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.

5. Montrer que l'algèbre $\left(L^1(\mathbb{R}^d), \star\right)$ n'admet pas d'élément unité.

6. Résoudre dans $(L^1(\mathbb{R}^d)$ l'équation $u \star u = u$.

Chapitre 6

Topologie des espaces de fonctions

Sommaire

La topologie est la notion fondamentale pour décrire l'idée de proximité entre les éléments d'un ensemble. Elle est la structure minimale permettant de donner un sens aux notions de convergence, de limite et de continuité. Dans ce chapitre, X désigne un ensemble non vide quelconque.

I Rappel sur la topologie usuelle de $\mathbb{R}$

Définition 6.1 Soit $A \subset \mathbb{R}$, on dit que A est un **ouvert de** $\mathbb{R}$ si

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A.$$

L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ s'appelle la topologie (usuelle) de $\mathbb{R}$ et se note $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Les complémentaires des ouverts de $\mathbb{R}$ s'appellent les **fermés de** $\mathbb{R}$.

Proposition 6.2 (***Propriétés***)

1. *$\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.*
2. *toute union d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*
3. *toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Preuve : 1. Direct (remarquez que tout ce qui suit l'expression $\forall x \in \emptyset$ est toujours vrai.) 2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un collection d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et comme A_i est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A_i$. Ainsi $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcup_{i\in I} A_i$, donc $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert. 3. Soit $(A_i)_{i\in J}$ un collection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Pour tout $i \in J$, $x \in A_i$ et comme A_i est ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[\subset A_i$. On pose $\varepsilon := \min_{i\in J}\varepsilon_i > 0$ on a alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcap_{i\in I} A_i$, donc $\bigcap_{i\in I} A_i$ est ouvert. □

Définition 6.3 On appelle voisinage de $x \in \mathbb{R}$, tout ouvert contentant x.

Définition 6.4 Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |x_n - x| < \varepsilon.$$

Proposition 6.5

Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall A \text{ voisinage de } x, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad x_n \in A.$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 6.6

Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F

$$x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x \in F.$$

Preuve : Exercice. □

Définition 6.7 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **continue en** $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est **continue sur** $\mathbb{R}$ si elle est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposition 6.8

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ si est seulement si

$$\forall A \text{ ouvert de } \mathbb{R}, \quad f^{-1}(A) \text{ ouvert de } \mathbb{R}.$$

Preuve : Exercice. □

II Espaces topologiques

1 Topologie générale

Définition 6.9 On appelle **topologie** sur un ensemble X tout ensemble de parties $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$ et X,
2. $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque,
3. $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts**. L'ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est appelé **espace topologique** noté $(X, \mathcal{T})$.

Définition 6.10 Soit $x \in X$, on appelle **voisinage** de x tout ouvert qui contient x.

Exemple : Les ensembles $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des topologies sur X. (Topologies grossière et discrète). L'ensemble $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ est une topologie sur $\{0,1\}$.

Exemple : La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ décrite à la section précédente.

Définition 6.11 On appelle **partie fermé** de l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ toute partie $F \subset X$ complémentaire d'un ouvert, i.e. telle que $F^c \in \mathcal{T}$. Ils vérifient naturellement les propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ et X sont fermés,
2. toute union finie de fermés est fermée,
3. toute intersection de fermés est fermée.

Proposition 6.12 (*Caractérisation ponctuelle des ouverts*)

Une partie A de X est ouverte si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe un voisinage de x contenu dans A.

Preuve : Sens direct : si A est ouvert, soit $x \in A$, la partie A est un voisinage de x contenu dans A. Sens réciproque : pour tout $x \in A$, on note ω_x un voisinage de x contenu dans A. On a alors $A = \bigcup_{x \in A} \omega_x$ qui est ouvert comme union d'ouverts. □

Définition 6.13 Soit A une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

- On appelle **intérieur de** A noté $\mathring{A}$ l'union de tous les ouverts inclus dans A.
- On appelle **adhérence de** A noté $\overline{A}$ l'intersection de tous les fermés contenant A.
- On appelle **frontière de** A l'ensemble fermé $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$.

Remarque : On obtient immédiatement les relations suivantes : pour toute partie $A \subset X$,

$$\left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c} \qquad \text{et} \qquad \left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}.$$

Proposition 6.14 (***Caractérisation de l'intérieur et de l'adhérence***)

Soit A une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. L'ensemble $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A et l'ensemble $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. De plus,

$$\mathring{A} = \{x \in A \mid \exists U \text{ voisinage de } x,\ U \subset A\},$$
$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \text{ voisinage de } x,\ U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Preuve : Pour les premières assertions on remarque que X est fermé et $\emptyset$ est ouvert et la stabilité des ouverts par union quelconque et des fermés par intersection quelconque. La propriété de $\mathring{A}$ est immédiate avec la définition d'un ouvert. Pour obtenir la propriété sur l'adhérence on remarque que l'adhérence de A est également le complémentaire de l'intérieur de A^c (se montre à partir de la définition). □

Définition 6.15 On dit qu'une partie D d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est **dense** dans X si

$$\overline{D} = X.$$

Définition 6.16 On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est **séparée** si

$$\forall x, y \in X, \quad \exists U, V \text{ ouverts tels que } x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset.$$

Définition 6.17 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subset X$. On appelle **topologie induite** de $\mathcal{T}$ sur Y l'ensemble $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Exemple : Les ouverts de $[0, 1]$ sont de la forme $\omega \cap [0, 1]$ avec ω ouvert de $\mathbb{R}$.

2 Convergence et continuité

Définition 6.18 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que (x_n) **converge** vers $x \in X$ si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad x_n \in U.$$

On utilise la notation $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ ou $x_n \xrightarrow{X} x$ ou encore $x_n \to x$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie utilisée.

Proposition 6.19 (***Unicité de la limite***)

Soit $\mathcal{T}$ une topologie séparée sur un ensemble X. Si une suite $(x_n)_n$ de X converge vers $x \in X$ et vers $y \in X$, alors $x = y$.

Preuve : Supposons que $x \neq y$. Comme $\mathcal{T}$ est séparée, il existe $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$. Donc il existe $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N_x$, $x_n \in U_x$ et $\forall n \geq N_y$, $x_n \in U_y$. Donc $\forall n \geq \max(N_x, N_y)$, $x_n \in U_x \cap U_y$. C'est absurde. □

Définition 6.20 On dit que x est une **valeur d'adhérence (v.a.)** de (x_n) si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad x_n \in U.$$

Proposition 6.21

L'élément x d'un espace topologique X est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ de X si et seulement s'il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers x.

Définition 6.22 Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. On dit que f est **continue** si toute image réciproque d'un ouvert de X_2 par f est un ouvert de X_1 :

$$U \text{ ouvert} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(U) \text{ ouvert.}$$

Proposition 6.23

Soit f est continue de $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dans $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Alors

$$F \text{ fermé} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \text{ fermé.}$$

Preuve : Si F est fermé, alors F^c est ouvert est par définition $f^{-1}(F^c)$ est ouvert donc $f^{-1}(F)^c = f^{-1}(F^c)$ est ouvert et donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

□

Définition 6.24 Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. On dit que f est **continue en** $x_1 \in X_1$ si toute image réciproque d'un voisinage de $f(x_1)$ par f est un voisinage de x_1 :

$$U \text{ voisinage de } f(x_1) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(U) \text{ voisinage de } x_1.$$

Proposition 6.25 (*Continuité versus continuité ponctuelle*)

Une fonction est continue si et seulement si elle est continue en tout point.

Preuve : Exercice. □

Il important de noter que l'ensemble des fonctions continues d'un espace topologique X dans un autre Y dépend des topologies choisies sur X et Y. Plus $\mathcal{T}_X$ contient d'ouverts, plus il y a de fonctions continues. Plus $\mathcal{T}_Y$ contient d'ouverts, moins il y a de fonctions continues

Exemple : On prend $X_2 = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Quelles sont les applications continues si $\mathcal{T}_1$ est la topologie grossière ou discrète ? Pour la grossière, il faut que $f^{-1}(U)$ soit $\emptyset$ ou X_1. Cela implique que f est constante. Au contraire, si on prend le topologie discrète, toute les fonctions sont continues.

Définition 6.26 Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $\Phi : X_1 \to X_2$. On dit que Φ est un **homéomorphisme** s'il est bijectif et si Φ et Φ^{-1} sont continus. En particulier on a

$$U \text{ ouvert } \Leftrightarrow \Phi^{-1}(U) \text{ ouvert.}$$

Exemple : La fonction arctan est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) dans $]-1,1[$ (muni de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}$).

3 Topologie engendrée, topologie initiale, topologie produit

Définition 6.27 Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X. On appelle **topologie engendrée** par $\mathcal{A}$ l'intersection de toutes les topologies qui contiennent $\mathcal{A}$. On la note $\sigma(\mathcal{A})$, c'est la plus petite topologie qui contient $\mathcal{A}$.

Exemple : La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles ouverts $]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces intervalles qui sont ouverts pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ donc naturellement $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}_{\text{usuelle}}$. Soit U un ouvert de la topologie usuelle. Par definition, pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset U$. Ainsi on peut écrire $U = \bigcup_{x \in U}]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[$. Donc U est une réunion d'élément de A ce qui en fait un élément de $\sigma(\mathcal{A})$.

On peut construire la topologie engendrée comme suit : on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ et $\sigma(\mathcal{A})$ l'ensemble des unions quelconques d'élément de $\mathcal{B}$ complété de X et de $\emptyset$. Il est clair que $\sigma(\mathcal{A})$ ainsi construite est stable par réunion quelconque. Elle est aussi stable par intersection finie (à vérifier).

Proposition 6.28

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la topologie engendrée par $\mathcal{A}$ est donnée par

$$\sigma(\mathcal{A}) := \left\{ \bigcup_{\text{quelconque}} \bigcap_{\text{finie}} A \mid A \in \mathcal{A} \right\} \cup \{X\}.$$

Preuve : On note $\mathcal{T}$ cet ensemble. Par définition d'une tribu, on a déjà $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Il contient également $\emptyset$, et X. Il est clairement stable par union quelconque et on montre aussi la stabilité par intersection finie. C'est donc une tribu qui contient $\mathcal{A}$ donc $\sigma(\mathcal{A})$. Ainsi $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$.

□

Etant donnée une famille de fonctions $f_i : X \to Y$, ou $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est un espace topologique, il est interessant de chercher la topologie minimale (la moins fine) qui rend toutes les fonction f_i continues.

Définition 6.29 Soit X un ensemble et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espace topologique, on appelle **topologie initiale** d'une famille de fonctions $(f_i)_{i \in I} : X \to Y$ la topologie la moins fine sur X telle que toutes les f_i soient continues. Cette topologie est engendrée par les $f_i^{-1}(U)$ avec U ouvert de Y. C'est-à-dire

$$\sigma\left(\left\{f_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \in \mathcal{T}_Y\right\}\right).$$

Définition 6.30 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est une **base d'ouverts** de $(X, \mathcal{T})$ si tout élément de $\mathcal{T}$ est l'union d'éléments de $\mathcal{A}$. En particulier, une base d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$ engendre $\mathcal{T}$ i.e. $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$.

Exemple : Les intervalles $]a, b[$ forment une base d'ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Les boules ouvertes forment une base d'ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$.

La réciproque est fausse : famille qui engendre une topologie n'est pas une base d'ouverts. Par exemple, on prend $X = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}$. C'est bien une topologie sur X. On remarque que $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ engendre $\mathcal{T}$ mais n'est pas une base d'ouverts. En revanche $\{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ est une base d'ouverts.

Définition 6.31 Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i=1}^n$ une famille finie d'espaces topologiques. On appelle **topologie produit** sur l'ensemble $X = \prod_{i=1}^n X_i$ la topologie engendrée par les produits d'ouverts $\prod_{i=1}^n U_i$, $U_i \in \mathcal{T}_i$. C'est aussi la topologie le moins fine (la plus petite) qui rend les projections $p_i : x \mapsto x_i$ continue. Elle est aussi engendrée par les $p_i^{-1}(U_i)$ avec U_i ouvert de X_i.

Exemple : La topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$ est égale à la topologie produit sur $\mathbb{R}^d$. Les cubes ouverts sont des ouverts de la topologie produit. Comme toute boule ouverte centrée en x contient un cube ouvert centré et x et réciproquement, on utilise la proposition 6.37 pour dire que chaque topologie est plus fine que l'autre.

Définition 6.32 Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques. On appelle **topologie produit** la topologie sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ la moins fine qui rend les projections $p_i : x \mapsto x_i$ continues. Elle est engendrée par les $p_i^{-1}(U_i)$ avec U_i ouvert de X_i.

Exemple : La convergence pour la topologie produit est la convergence simple des fonctions. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est le produit cartésien $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On peut le munir de la topologie produit. Les projections sont les applications $p_x : f \mapsto f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ sont donc continue.

Si (f_n) est une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui converge vers f au sens de la topologie produit, on fixe $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $U := p_x^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui contient f donc pour n assez grand, $f_n \in U$ c'est-à-dire $f_n(x) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Ainsi $f_n(x) \to f(x)$ et donc (f_n) converge simplement vers f.

Réciproquement si (f_n) converge simplement vers f on considère un voisinage U de f pour la topologie produit. Celui-ci contient un autre voisinage V de la forme $V := \bigcap_{i=1}^n p_{x_i}^{-1}(\omega_i)$ avec ω_i voisinage de $f(x_i)$ dans $\mathbb{R}$. La convergence des $f_n(x_i)$ vers $f(x_i)$ donne que pour n assez grand, $f_n \in p_{x_i}^{-1}(\omega_i)$ pour tout i donc $f_n \in V \subset U$. Donc (f_n) converge vers f pour la topologie produit.

4 Parties compactes

Définition 6.33 Dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ une **partie compacte** $K \subset X$ est une partie qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de K par des ouverts, on peu extraire un recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouvert,

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \Rightarrow \quad \exists J \subset I,\ J \text{ fini}, \quad K \subset \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Proposition 6.34 (***Propriétés des parties compactes***)

1. *Une partie compacte est fermée.*
2. *L'intersection d'une suite décroissante de compacts non vide est non vide.*
3. *L'intersection d'une partie compacte et d'une partie fermée est compacte.*
4. *Toute suite d'une partie compacte K admet une valeur d'adhérence dans K.*
5. *L'image d'une partie compacte par une application continue est compacte.*

Preuve : (i) Soit K une partie compacte. On montre que K^c est ouvert. Soit $x \in K^c$. Pour tout $y \in K$, comme la topologie est séparée, il existe $\omega_1(y)$ et $\omega_2(y)$ ouverts tels que $y \in \omega_1(y)$, $x \in \omega_2(y)$ et $\omega_1(y) \cap \omega_2(y) = \emptyset$. Comme la famille $(\omega_1(y))_{y \in K}$ recouvre K, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n \omega_1(y_i)$. D'autre part, $x \in U := \bigcap_{i=1}^n \omega_2(y_i)$ ouvert qui ne rencontre aucun des $\omega_1(y_i)$). Donc $U \cap \bigcup_{i=1}^n \omega_1(y_i) = \emptyset$ ce qui implique $U \cap K = \emptyset$ i.e. $x \in U \subset K^c$. Ainsi K^c est ouvert donc K est fermé.

(ii) Si l'intersection est vide, alors les complémentaires forment un recouvrement ouvert de l'espace et donc de tout compact de la suite. On choisit un compact particulier K_{n_0} et on extrait un sous-recouvrement fini par des complémentaires (emboîtés) de compacts de la suite. On note n le plus grand indice des compacts du recouvrement fini et on a donc obtenu $K_{n_0} \subset K_n^c$, ce qui est impossible pour des compacts non vides emboîtés.

(iii) Soit K une partie compacte et F un fermé. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $F \cap K$. Alors $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{F^c\}$ est un recouvrement de K. Donc il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i \cup F^c$ et donc $F \cap K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Donc $F \cap K$ est compact.

(iv) Soit (x_n) une suite de K compact. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $X_N := \{x_n \mid n \geq N\}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X}_N$. En effet,

$$\begin{aligned} x \text{ v.a. de } (x_n) &\Leftrightarrow \forall U \text{ voisinage de } x,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ x_n \in U \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \forall U \text{ voisinage de } x,\ X_N \cap U \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ x \in \overline{X}_N \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X}_N. \end{aligned}$$

Or les ensembles $\overline{X}_N$ sont des fermés de K et forment une suite décroissante de compacts. Leur intersection est non vide.

(v) Exercice. □

Théorème 6.35 (***Tichonov***)

Toute produit cartésien de parties compactes est compact pour la topologie produit.

Preuve : Ce théorème fondamental repose sur l'axiome du choix. □

5 Comparaison de topologies

Dans cette sous section, on considère $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un même ensemble X.

Définition 6.36 Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, on dit que

- $\mathcal{T}_1$ est plus **grossière** (ou plus petite) que $\mathcal{T}_2$,

- $\mathcal{T}_2$ est plus **fine** (ou plus grande) que $\mathcal{T}_2$.

Proposition 6.37 (***Critère de comparaison***)

Si pour tout $x \in X$ et tout voisinage U_1 de x dans $\mathcal{T}_1$, il existe un voisinage U_2 de x dans $\mathcal{T}_2$ tel que $U_2 \subset U_1$, alors $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ c'est-à-dire $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Preuve : Soit U un ouvert de $\mathcal{T}_1$. Pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x dans $\mathcal{T}_1$, donc il existe $U_2 \in \mathcal{T}_2$ tel que $x \in U_2 \subset U$. Ainsi U est un ouvert de $\mathcal{T}_2$. □

Proposition 6.38

Si $\mathcal{T}_2$ plus fine que $\mathcal{T}_1$, i.e. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, alors on a

1. *U ouvert pour $\mathcal{T}_1 \quad \Rightarrow \quad U$ ouvert pour $\mathcal{T}_2$,*
2. *F fermé pour $\mathcal{T}_2 \quad \Rightarrow \quad F$ fermé pour $\mathcal{T}_1$.*
3. *D dense pour $\mathcal{T}_2 \quad \Rightarrow \quad D$ dense pour $\mathcal{T}_1$.*
4. *K compact pour $\mathcal{T}_2 \quad \Rightarrow \quad K$ compact pour $\mathcal{T}_1$.*
5. *(x_n) converge pour $\mathcal{T}_2 \quad \Rightarrow \quad (x_n)$ converge pour $\mathcal{T}_1$.*

III Topologie des espaces métriques

Les espaces métriques sont des ensembles munis d'une distance. C'est une notion plus forte que celle d'espace topologique car on peut munir les espaces métriques d'une topologie naturelle séparée construite à partir de la distance. Plusieurs notions de la topologie générale se simplifient dans les espaces métriques grâce au *critère séquentiel.*

1 Distance et topologie

Définition 6.39 On appelle **espace métrique** (X, d) un ensemble X muni d'une distance d. On rappelle qu'une distance est une application $d : X^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) \geq 0$ (positivité),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie),
3. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (séparation),
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Exemple : Sur $\mathbb{C}$, la fonction $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ est une distance.

Exemple : Soit $d : (\mathbb{N}^n)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i \neq y_i\}$. C'est une distance sur $\mathbb{N}^n$ appelée distance de Hamming très utile en informatique.

Exemple : Soit (X, d) un espace métrique. On note $\delta(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$. Alors la fonction $d_H(A, B) := \max(\delta(A, B), \delta(B, A))$ est une distance sur l'ensemble des parties fermées bornées non vides de X. Cette distance est appelée distance de Hausdorff.

Définition 6.40 On appelle **boules ouvertes** de l'espace métrique (X,d) les parties de X de la forme

$$B(x,\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. On appelle **topologie d'espace métrique** sur (X,d) la topologie $\mathcal{T}_d$ engendrée par l'ensemble les boules ouvertes :

$$\mathcal{T}_d := \sigma\left(\{\, B(x,\varepsilon) \mid \ x \in X,\ \varepsilon > 0\}\right).$$

Proposition 6.41

Une partie A de (X,d) est ouverte de la topologie $\mathcal{T}_d$ si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$.

Preuve : On montre que les ensembles A de X qui vérifient la caractérisation ci-dessus forment bien une topologie (exercice) qui contient les boules ouvertes et donc est plus fine que la topologie engendrée. Réciproquement, tout ouvert satisfaisant cette caractérisation est clairement un ouvert pour la topologie engendrée. □

Proposition 6.42

La topologie engendrée par une distance est une topologie séparée.

Preuve : Soient x et y deux points distincts d'un espace X muni d'une distance d et soit $\varepsilon < d(x,y)/2$. Si $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$, on a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon < d(x,y),$$

donc $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ et la topologie est bien séparée. □

2 Convergence et continuité dans les espaces métriques

Proposition 6.43

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) converge vers $x \in X$ pour la topologie d'espace métrique si et seulement $d(x_n,x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad d(x_n,x) < \varepsilon.$$

On note cette convergence $x_n \overset{d}{\to} x$.

Preuve : Exercice. □

Proposition 6.44

Une suite (x_n) d'un espace métrique (X,d) admet $x \in X$ pour valeur d'adhérence si et seulement si (x_n) admet une suite extraite (x_{φ_n}) qui converge vers x.

Preuve : Sens direct : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n)$ est un voisinage de x donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq N$ tel que $x_p \in B(x, 1/n)$. On construit la suite (φ_n) par récurrence : $\varphi_0 = 0$ puis pour tout $n \geq 0$ on choisit φ_{n+1} tel que $\varphi_{n+1} > \varphi_n$ et $x_{\varphi_{n+1}} \in B(x, 1/(n+1))$. La suite (φ_n) est strictement croissante et vérifie $x_{\varphi_n} \in B(x, 1/n)$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi (x_{φ_n}) converge vers x.

Sens réciproque : soit U un voisinage de x. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Soit $N \in \mathbb{N}$, comme (x_{φ_n}) converge vers x, $x_{\varphi_n} \in B(x, \varepsilon)$ à partir d'un certain rang, donc il existe $p \geq N$ tel que $x_p \in B(x, \varepsilon) \subset U$.

Exercice. □

Proposition 6.45

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. La fonction $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ pour les topologies d'espace métrique si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad , \forall x' \in X, \quad d_X(x, x') < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 6.46 (*Critère séquentiel de continuité*)

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. La fonction $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ pour les topologies d'espace métrique si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de X on a

$$x_n \overset{d_X}{\to} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \overset{d_Y}{\to} f(x).$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 6.47 (*Caractérisation séquentielle des fermés*)

Une partie F d'un espace métrique (X, d) est fermée si et seulement si pour toute suite (x_n) de F,

$$x_n \overset{d}{\to} x \quad \Rightarrow \quad x \in F.$$

Preuve : Le sens direct est vrai même dans les espaces topologiques. Soient A un fermé de X, et $(x_n)_n$ une suite de A qui converge vers x. Supposons que $x \in A^c$ qui est ouvert. Il existe U voisinage de x te que $U \subset A^c$ i.e. $U \cap A = \emptyset$. Or pour n assez grand, $x_n \in U$ i.e. $x_n \notin A$. C'est absurde. Donc $x \in A$. Réciproquement, supposons que l'ensemble A contient toute les limites de ses suites convergentes. Supposons que A^c n'est pas ouvert. Alors il existe $x \in A^c$ tel que pour tout $n \geq 1$, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. On peut choisir un point $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. Ceci forme une suite $(x_n)_n$ de A qui tend vers x. Donc $x \in A$ ce qui est absurde. Ainsi A^c est ouvert et A est fermé. □

3 Espace métrique complet

Définition 6.48 Dans un espace métrique (X, d) on appelle **suite de Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

On appelle **espace métrique complet** un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Proposition 6.49 (*Converge ⇒ de Cauchy*)

Dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve : Exercice. □

Exemple : L'espace $\mathbb{N}^d$ muni de la distance de Hamming est complet. En effet si (u_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{N}^d$ pour la distance de Hamming, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$ $d(u_p, u_N) < 1$. Cela implique que $d(u_p, u_q) = 0$ et donc $u_p = u_N$. Donc la suite est constance à partir d'un certain rang et donc converge.

4 Parties denses dans les espaces métriques

Proposition 6.50 (*Partie dense d'un espace métrique*)

Soient (X, d) un espace métrique et $D \subset X$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *D est dense dans X.*
2. *Pour tout U ouvert non vide de X, $D \cap U \neq \emptyset$.*
3. *Pour tout $x \in X$ il existe une suite de D qui converge vers x.*
4. *Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Preuve : (1) ⇔ (2) Par définition de la densité est de $\overline{D}$.

(2) ⇒ (3) : on suppose que $\overline{D} = X$. Soit $x \in X$, pour tout $n \geq 1$, $B(x, 1/n) \cap D \neq \emptyset$. On appelle x_n un point de cet ensemble. La suite (x_n) est une suite de D qui converge vers x.

(3) ⇒ (4) : Immédiat.

(4) ⇒ (2) : Soit U un ouvert non vide, et $x \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Alors il existe $y \in D$ tel que $y \in B(x, \varepsilon)$, donc $y \in U \cap D$.

□

Le lemme de Baire est un résultat majeur dans les espaces métrique complet.

Lemme 6.51 (*de Baire*)

Soit un espace métrique complet (X, d).

1. *Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est dense dans X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X.*
2. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

Preuve : 1. Soit V un ouvert non vide de (X,d). On construit une suite décroissante de boules fermés de la manière suivante. U_0 dense dans X donc $U_0 \cap V$ est un ouvert non vide. On choisit $x_0 \in U_0 \cap V$ et r_0 tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$ et on construit les suites (x_n) et (r_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n), \quad \text{avec} \quad r_n \in]0, 2^{-n}[.$$

On prouve par récurrence que cette construction est possible en utilisant la densité de chaque U_n dans X.

On montre maintenant que le suite (x_n) est de Cauchy. En effet, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+p}, x_n) < 2^{-n}$. Ainsi, comme (X,d) est complet, (x_n) converge vers $x \in X$. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $x_{n+p} \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset U_n$ ouvert donc $x \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset U_n$. Ainsi,

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

De plus $x \in V$ donc $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap V \neq \emptyset$. D'après le point (2) de la proposition précédente, $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$ est dense dans X.

2. Ce point est un simple passage au complémentaire du point (1). En effet on remarque qu'une partie est d'intérieur vide si et seulement si son complémentaire est dense dans X.

□

Corollaire 6.52

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermé d'un espace métrique complet (X,d). Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est dense dans X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X.

Proposition 6.53 (*Extension d'une application uniformément continue*)

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) et $u : D \subset X \to Y$ une fonction uniformément continue. Si

1. *D est dense dans X,*
2. *Y est complet,*

alors il existe une unique fonction $\tilde{u} : X \to Y$ uniformément continue telle que $\tilde{u}|_D = u$.

Preuve : Soit $x \in D^c$, il existe une suite (x_n) de D qui converge vers x. Soit $\varepsilon > 0$, comme u est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que si $d_X(z_1, z_2) < \eta$, alors $d_Y(u(z_1), u(z_2)) < \varepsilon$. Comme (x_n) est de Cauchy, $d_X(x_p, x_q) < \eta$ pour p, q assez grand et donc $d_Y(u(x_p), u(x_q)) < \varepsilon$ pour p, q assez grand. Donc $u(x_n)$ est de Cauchy dans Y (complet) donc converge vers un $y \in Y$. Cet élément est unique au sens ou si (z_n) est une autre suite de D qui converge vers x, alors $u(z_n)$ converge également vers y (facile à vérifier). On définit alors $\tilde{u}(x) = y$. On pose également $\tilde{u} = u$ sur D et on vérifie aisément que $\tilde{u}$ est uniformément continue sur X et que ce prolongement est unique. □

5 Parties compactes des espaces métriques

Proposition 6.54 (*Compacté et compacité séquentielle*)

Dans un espace métrique (X,d) une partie K est compacte si et seulement si toute suite de K admet une valeur d'adhérence dans K. De plus K est borné.

Preuve : Pour le sens direct, voir proposition 6.34. Pour sense réciproque, on suppose que K n'est pas compact dont il existe un recouvrement $K \subset U := \bigcup_{i \in I} U_i$ dont on ne peut extraire de recouvrement fini. On construit alors une suite (x_n) de K qui a la propriété suivante : il existe une suite d'ouvert $(U_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in U_{i_n}, \quad \text{et} \quad x_n \notin \bigcup_{p=0}^{n-1} U_{i_p}.$$

Cette suite se construit par récurrence. On choisit $x_0 \in K$ et $U_0 \ni x_0$. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(U_{i_0}, \ldots, U_{i_n})$ sont construit satisfaisant la propriété, on considère

$$V_n := U \backslash \bigcup_{p=0}^{n} U_{i_p}$$

On remarque que $V_n \cap K$ est non vide car sinon cela signifie que $K \subset \bigcup_{p=0}^{n} U_{i_p}$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. On peut donc choisir $x_{n+1} \in K \cap V_n$ et $i_{n+1} \notin \{i_0, \ldots, i_n\}$ tel que $x_{n+1} \in U_{i_{n+1}}$. On remarque aussi que chaque U_i contient au plus un élément de la suite (x_n).

Cette suite, a un extraction près, converge vers $x \in K$. Soit $U_j \ni x$, c'est un voisinage de x qui contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang. C'est impossible en vertu de la remarque précédente.

Un compact dans un métrique peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes. Il est donc borné. □

IV Topologie des espaces vectoriels normés

1 Norme et topologie

Définition 6.55 On appelle **espace vectoriel normé (e.v.n.)** $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|.\|_E$, c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui satisfait pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

1. homogénéité : $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \, \|x\|_E$,
2. séparation : $\|x\|_E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$,
3. inégalité triangulaire : $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

On lui associe une distance canonique $d_E(x, y) = \|x - y\|_E$ qui en fait un espace métrique. On lui associe canoniquement la topologie d'espace métrique associée. On parle de topologie d'e.v.n. ou topologie forte d'e.v.n. On note cette topologie $\mathcal{T}_{\|.\|_E}$.

Un e.v.n. est aussi un espace métrique en définissant la distance canoniquement associé à sa norme :

$$d_E(x, y) := \|x - y\|_E \, .$$

Définition 6.56 On appelle topologie **d'espace vectoriel normé** sur E la topologie d'espace métrique

Définition 6.57 Soient deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel E. On dit que la norme $\|.\|_2$ est **plus fine que** $\|.\|_1$ si il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in E, \quad \|u\|_1 \leq C \|u\|_2 .$$

Si $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_1$ et réciproquement, alors ont dit que ces deux normes sont **équivalentes**.

Proposition 6.58

Soient deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel E. La norme $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_1$ si et seulement si la topologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ est plus fine que $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$ c'est-à-dire $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$. Si les deux normes sont équivalentes, alors les topologies sont identiques.

Preuve : Si $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_1$, on remarque que pour tout $u \in E$ $\varepsilon > 0$, alors $B_2(x, \varepsilon/C) \subset B_1(x, \varepsilon)$. Ainsi, si U est un ouvert de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$ et $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_1(x, \varepsilon) \subset U$ donc $B_2(x, \varepsilon/C) \subset E$ donc U est un ouvert de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$.

Réciproquement, si $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ alors comme $B_1(0,1)$ est un ouvert de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$, c'est aussi un ouvert de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_2(0, \varepsilon) \subset B_1(0,1)$. Ainsi, pour tout $u \in E \backslash \{0\}$,

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{u}{\|u\|_2} \in B_2(0, \varepsilon) \subset B_1(0,1)$$

donc

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} \in B_2(0, \varepsilon) < 1$$

et donc $\|u\|_1 \leq 2/\varepsilon \|u\|_2$.

$\square$

Proposition 6.59

Soient E et F deux e.v.n.. Une application linéaire $T : E \to F$ est continue si et seulement si

$$\exists C > 0, \quad \forall u \in E, \qquad \|T u\|_F \leq C \|u\|_E .$$

Preuve : ($\Rightarrow$) Comme T est continue $U := T^{-1}(B(0,1))$ est un voisinage 0 dans E. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset T^{-1}(B(0,1))$. Cela signifie que pour tout $u \in B(0, \varepsilon)$, $\|Tu\|_F \leq 1$. Donc pour tout $u \neq 0$,

$$\|Tu\|_F = \frac{2\|u\|_E}{\varepsilon} \left\| T\left(\frac{\varepsilon u}{2\|u\|_E}\right) \right\|_F \leq \frac{2}{\varepsilon} \|u\|_E .$$

($\Leftarrow$) Soit $u \in E$ et (u_n) une suite qui converge vers u. Alors $\|Tu_n - Tu\|_F \leq C \|u_n - u\|_E$. Donc Tu_n converge vers Tu. Ainsi T est continue en u et donc en tout point. $\square$

Définition 6.60 Si E et F sont deux e.v.n. l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F noté $\mathscr{L}(E,F)$ muni de la norme

$$\|T\|_{E,F} := \sup_{u \in E} \frac{\|T u\|_F}{\|u\|_E}$$

est un e.v.n.

2 Espaces de Banach

Définition 6.61 Un e.v.n. complet pour la métrique associée à sa norme est appelé **espace de Banach**.

Exemple : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et tout les espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach.

Exemple : L'espace $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach ainsi que $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|.\|_{\mathcal{C}^1(0,1)})$. L'espace $(\mathcal{C}^0[(0,1]), \|.\|_{L^1(0,1)})$ n'en est pas un.

Théorème 6.62 (*Fisher-Riesz*)

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'e.v.n. $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Banach.

Preuve : Cas $1 \leq p < +\infty$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^p(\Omega)$. On choisit une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\left\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose alors $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_N(x) := \sum_{k=0}^{N} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)|, \quad \forall x \in \Omega.$$

(On choisira des représentants quelconques des u_{n_k}). Cette suite de fonctions est croissante est vérifie $\|v_N\|_{L^p(\Omega)} \leq 2$. Par théorème de convergence monotone (v_N) converge simplement vers une limite v qui appartient à $L^p(\Omega)$.

Pour tout $1 \leq k_1 \leq k_2$ et pour presque tout $x \in \Omega$,

$$|u_{n_{k_2}}(x) - u_{n_{k_1}}(x)| \leq \sum_{k=k_1}^{k_2-1} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)| \leq v(x) - v_{k_1-1}(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \Omega$, la suite $u_{n_k}(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge vers une limite noté $u(x)$. Pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$|u(x) - u_{n_{k_1}}(x)| \leq v(x) \quad \forall k_1 \geq 1.$$

En particulier, $u \in L^p(\Omega)$ et par convergence dominée,

$$\int_\Omega |u - u_{n_{k_1}}|^p \mathrm{d}\mu \to 0$$

quand $k_1 \to 0$. Ainsi, la suite de Cauchy (u_n) admet une valeur d'adhérence dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ donc converge dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et donc $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est complet. □

Théorème 6.63 (*Point fixe de Picard-Banach*)

Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un application contractante i.e. telle qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que pour tous $u, v \in E$,

$$\|T(u) - T(v)\|_E \leq c\,\|u - v\|_E\,.$$

Alors T admet un unique point fixe.

Preuve : Exercice. $\square$

Théorème 6.64 (*Banach-Steinhaus*)

Soit E un espace de Banach, F un e.v.n. et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si

$$\forall u \in E, \qquad \sup_{i\in I} \|T_i u\|_F < +\infty,$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{E,F} < +\infty.$$

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$F_n = \bigcap_{i\in I} \{ u \in E \mid \|T_i u\|_F \leq n \}.$$

Ce sont des parties fermés, comme intersection de fermés et on remarque que d'après l'hypothèse,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E.$$

En effet, soit $u \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I$, $\|T_i u\|_F \leq n$ donc $u \in F_n$. On en déduit en particulier que l'intérieur de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide. En utilisant la contraposée du point (2) du Lemme de Baire, on obtient qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. Ainsi il existe $u_0 \in F_{n_0}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$B(x_0, \varepsilon_0) \subset F_{n_0}.$$

Soit $i \in I$ et $u \in E\backslash\{0\}$. On pose $\varepsilon = \varepsilon_0/(2\,\|u\|_E)$. On a

$$\|T_i u\|_F = \frac{1}{\varepsilon}\,\|T_i(\varepsilon u)\|_F = \frac{1}{\varepsilon}\,\|T_i(u_0+\varepsilon u) - T_i u_0\|_F \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\|T_i(u_0+\varepsilon u)\|_F + \frac{1}{\varepsilon}\,\|T_i u_0\|_F.$$

Comme u_0 et $u_0 + \varepsilon u$ sont dans $B(x_0, \varepsilon_0)$ et donc dans F_{n_0}, on obtient

$$\|T_i u\|_F \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} = \frac{4n_0}{\varepsilon_0}\,\|u\|_E$$

et ainsi, pour tout $i \in I$, $\|T_i\|_{E,F} \leq 4n_0/\varepsilon_0 < +\infty$. $\square$

3 Résultats de densité dans les e.v.n.

On va appliquer le résultat aux opérateurs linéaires continus (qui sont uniformément continus). On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et on définit sur $\mathscr{L}(E,F)$ la norme induite suivante :

$$\text{pour } L \in \mathscr{L}(E,F),\ \|L\|_{E,F} = \sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|L\,u\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\substack{u\in E\\ \|u\|_E=1}} \|L\,u\|_F.$$

Proposition 6.65 (***Extension d'un application linéaire continue***)

Soient E, F deux un e.v.n., D un s.e.v. de E et $L \in \mathscr{L}(D, F)$. Si

1. *D est dense dans E,*
2. *F est complet (de Banach),*

alors, il existe une unique application linéaire continue $\tilde{L} \in \mathscr{L}(E, F)$ qui vérifie

$$\tilde{L}|_D = L \quad \text{et} \quad \|\widetilde{L}\|_{E,F} = \|L\|_{D,F}.$$

Preuve : On applique la proposition précédente pour l'existence et l'unicité de $\widetilde{L}$ et pour justifier l'existence de la norme de cet opérateur. On note

$$\alpha = \sup_{\substack{v \in D \\ v \neq 0}} \frac{\|L\, v\|_F}{\|v\|_E}.$$

On a trivialement $\alpha \leq \|\widetilde{L}\|_{E,F}$. On montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v \in D$ tel que

$$\|\widetilde{L}\|_{E,F} \leq \frac{\|L\, v\|_F}{\|v\|_E} + \varepsilon \tag{6.1}$$

ce qui impliquera $\|\widetilde{L}\|_{E,F} \leq \alpha + \varepsilon$ et conclura la preuve.

Soit donc $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $u \in E \backslash \{0\}$ tel que

$$\|\widetilde{L}\|_{E,F} \leq \frac{\|\widetilde{L}\, u\|_F}{\|u\|_E} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2}$$

Comme

1. l'application $v \to \dfrac{\|\widetilde{L}\, v\|_F}{\|v\|_E}$ est continue sur $E \backslash \{0\}$,
2. D est dense dans E et
3. $L = \tilde{L}$ sur D,

il existe $v \in D$ tel que

$$\frac{\|\widetilde{L}\, u\|_F}{\|u\|_E} \leq \frac{\|L\, v\|_F}{\|v\|_E} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En combinant cette équation avec 6.2 on obtient bien 6.1.

□

Le résultat de densité suivant est très utile car il permet d'étendre certains raisonnement valable sur l'espace des fonctions tests $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ très réguliers et intégrable aux espaces L^p.

Théorème 6.66 (***Densité dans L^p***)

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Preuve : Voir Annexe 3. □

4 Topologie des espaces vectoriels de dimension finie

L'espace $\mathbb{R}^d$ ou plus généralement tout $\mathbb{R}$-espace ou $\mathcal{C}$-espace de dimension finie possède une unique topologie canonique associée à sa structure.

Proposition 6.67 (*Equivalence des normes en dimension finie*)

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En conséquence, il existe une unique topologie d'e.v.n. sur cet espace.

Preuve : Exercice. ☐

Proposition 6.68 (*Parties compactes d'un e.v. de dimension finie*)

Dans $\mathbb{R}$ et plus généralement dans tout espace vectoriel E de dimension finie, les parties compactes sont les fermés bornés.

Preuve : Exercice. ☐

Proposition 6.69 (*Ouverts comme réunion de compacts*)

Soit E un e.v.n. de dimension finie. Pour tout ouvert U de E, il existe une suite croissante de compact $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

Preuve : On pose $K_n := \left\{ x \in A \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) \geq \frac{1}{n},\ \|x\|_E \leq n \right\}$. Les K_n sont fermés bornés donc compacts. La suite est clairement croissante et sa réunion contient bien U. ☐

Théorème 6.70 (*Régularité de la mesure de Lebesgue*)

Pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lambda_d(B) = \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subset B \text{ compact}\}$$
$$\lambda_d(B) = \inf\{\lambda_d(U) \mid U \supset B \text{ ouvert}\}.$$

Preuve : Exercice. ☐

La première équation s'appelle régularité intérieure de la mesure, et la seconde régularité extérieure de la mesure. Ces formules sont satisfaites pour toutes les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$, complétées ou non.

V Dualité

Dans cette section, E désigne un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espace dual

Définition 6.71 On appelle **dual** de E, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$:

$$E' := \mathscr{L}(E, \mathbb{K}).$$

Cet espace est naturellement muni de la norme d'opérateur

$$\|f\|_{E'} := \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(u)|}{\|u\|_E}.$$

On utilise le **crochet de dualité** pour noter l'application d'un élément du dual $f \in E'$ à un élément u de E :

$$\langle f, u \rangle_{E',E} := f(u).$$

Proposition 6.72

$$\forall u \in E, \quad \forall f \in E', \qquad |\langle f, u \rangle_{E',E}| \leq \|f\|_{E'} \|u\|_E .$$

Preuve : Par définition de $\|f\|_{E'}$. □

Proposition 6.73

Pour tout $u \in E$, il existe $f_u \in E'$ tel que

$$\|f_u\|_{E'} = \|u\|_E \qquad \text{et} \qquad \langle f_u, u \rangle_{E',E} = \|u\|_E^2 .$$

De plus,

$$\|u\|_E = \max_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, u \rangle_{E',E}|}{\|f\|_{E'}}.$$

Preuve : L'existence de l'élément $f_u \in E'$ est délicate et repose sur le théorème d'Hahn-Banach (non traité en cours). Voir [Brezis]. Pour la dernière égalité,

$$\sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, u \rangle_{E',E}|}{\|f\|_{E'}} \leq \|u\|_E$$

en vertu de la proposition précédente. Le sup est attend en choisissant f_u. □

2 Topologie faible

Définition 6.74 On appelle **topologie faible** sur E la topologie initiale de l'ensemble E', c'est-à-dire la plus petite topologie qui rend continues toute les fonctions de E'. Elle est notée $\sigma(E, E')$.

C'est la topologie engendrée par les ensembles $f^{-1}(\omega)$ pour tout $f \in E'$ et tout ω ouvert de $\mathbb{K}$. C'est une topologie sur E moins fine (plus petite) que la topologie usuelle issue de la norme de E. Elle n'a d'intérêt que dans les espaces de dimension infinie car elle est équivalente aux topologies induites par les normes en dimension finie.

Proposition 6.75

La topologie faible $\sigma(E, E')$ est une topologie séparé sur E.

Preuve : La preuve utilise le théorème d'Hahn-Banach (non traité dans ce cours). Ce théorème important implique notamment que si $u_1, u_2 \in E$ sont distincts, alors il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ telle que $f(u_1) < f(u_2)$. On choisit $\alpha \in]f(u_1), f(u_2)[$ et ainsi en posant $U_1 := f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$, $U_2 := f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$, deux ouverts de la topologie faible, on a clairement $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Donc la topologie faible est bien séparée. $\square$

Définition 6.76 On dit que la suite $(u_n)_n$ de E **converge faiblement** vers $u \in E$ si elle converge ver u pour la topologie faible. On note cette convergence

$$u_n \stackrel{E}{\rightharpoonup} u.$$

La caractérisation suivante pour la convergence faible est fondamentale :

Proposition 6.77

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u \in E$ si et seulement si

$$\forall f \in E', \quad \langle f, u_n \rangle_{E',E} \to \langle f, u \rangle_{E',E} \,. \tag{6.3}$$

Preuve : Sens direct : on suppose que (u_n) converge faiblement vers u. Soit $f \in E'$. Montrons que $\langle f, u_n \rangle_{E,E'} \to \langle f, u \rangle_{E,E'}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $U = f^{-1}(]f(u) - \varepsilon, f(u) + \varepsilon[)$. C'est un ouvert de la topologie faible qui contient u. Donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in U$ i.e. $f(u_n) \in]f(u) - \varepsilon, f(u) + \varepsilon[$, c'est-à-dire

$$\left| \langle f, u_n \rangle_{E',E} - \langle f, u \rangle_{E',E} \right| \leq \varepsilon.$$

On suppose que (u_n) vérifie la caractérisation 6.3. Soit U un voisinage de u pour la topologie faible. D'après la proposition 6.28, comme la topologie faible est engendrée par

$$\mathcal{A} := \left\{ f_i^{-1}(V_i) \;\middle|\; f_i \in E',\ V_i \text{ ouvert de } \mathbb{K} \right\},$$

on a que

$$U = \bigcup_{\text{quelconque}} \bigcap_{\text{fini}} A_i, \qquad A_i \in \mathcal{A}.$$

Donc il existe $V_1, \ldots, V_p$ ouverts de $\mathbb{K}$ et $f_1, \ldots, f_p \in E'$ tels que

$$u \in \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(V_i) \subset U.$$

Il existe donc un rang N tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$f_i(u_n) \in V_i$$

et donc $u_n \in U$. Ainsi $u_n \stackrel{E}{\rightharpoonup} u$. $\square$

Proposition 6.78 (*Propriétés de la convergence faible*)

1. *Si* $u_n \overset{E}{\to} u$ *alors* $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$,
2. *si* $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$ *alors* (u_n) *est bornée,*
3. *si* $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$ *alors* $\|u\|_E \leq \liminf \|u_n\|_E$,
4. *si* $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$ *et* $f_n \overset{E'}{\to} f$ *alors* $\langle f_n, u_n\rangle_{E',E} \to \langle f, u\rangle_{E',E}$.

Preuve : 1. Facile en utilisant la proposition 6.72.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n : E' \to \mathbb{K}$ définie par $T_n f = \langle f, u_n\rangle_{E',E}$. On remarque que pour tout n, $\|T_n\|_{E',\mathbb{K}} \leq \|u_n\|_E$ et par ailleurs, en utilisant la proposition 6.73, on choisit f tel que $\|f\|_{E'} = \|u_n\|_E$ et $|T_n f| = \|u_n\|_E^2$ donc pour tout n,

$$\|T_n\|_{E',\mathbb{K}} = \|u_n\|_E .$$

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'application linéaire continue et on remarque que pour tout $f \in E'$, $T_n f \to \langle f, u\rangle_{E',E}$ donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f| \leq +\infty.$$

D'après le théorème de Banach - Steinhaus 6.64, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{E',\mathbb{K}} < +\infty.$$

Ainsi, $\sup_n \|u_n\|_E < +\infty$.

3. On prend la $\liminf$ dans l'inégalité $|\langle f, u_n\rangle_{E',E}| \leq \|f\|_{E'} \|u_n\|_E$ pour obtenir

$$|\langle f, u\rangle_{E',E}| \leq \|f\|_{E'} \liminf_n \|u_n\|_E$$

puis on choisit $f = f_u$ de la proposition 6.73. On obtient alors

$$\|u\|_E^2 \leq \|u\|_E \liminf_n \|u_n\|_E .$$

4. On écrit, pour tout n,

$$|\langle f_n, u_n\rangle_{E',E} - \langle f, u\rangle_{E,E'}| \leq |\langle f_n - f, u_n\rangle_{E,E'}| + |\langle f, u_n\rangle_{E,E'} - \langle f, u\rangle_{E,E'}|.$$

Le premier terme de droite peut être majoré comme suit

$$|\langle f_n - f, u_n\rangle_{E,E'}| \leq \|f_n - f\|_{E'} \|u_n\|_E$$

et donc tend vers 0 puisque $f_n \overset{E'}{\to} f$ et $(\|u_n\|_E)_n$ bornée. Le second terme tend aussi vers 0 puisque $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$.

$\square$

VI Exercices

Exercice 1. On se place sur $\mathbb{R}$ munie de la topologie usuelle. Soit $A = \{0\}\cup]1,2[\cup]2,3[$. Déterminer $\overline{A}$, $\mathring{A}$, ∂A, $\overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{A}}$.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}^d$, on note $B(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 < r\}$. Montrer que $\{B(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ est une topologie sur $\mathbb{R}^d$. Est-elle séparée ?

Exercice 3. Quelles sont les suites convergentes pour la topologie discrète ? Pour la topologie grossière ? Quelles sont leurs limites ?

Exercice 4. Soit X en semble non vide. Soit $x_0 \in X$. On pose

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \mid x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X. Est-elle séparée ?

2. Montrer que pour cette topologie, les suites qui convergent vers x_0 convergent vers tout les points de X.

Exercice 5. Distance de Hamming. On muni $\mathbb{R}^n$ de la distance de Hamming : $d(x,y) := \mathrm{card}\{i \mid x_i \neq y_i\}$.

1. Montrer que d est bien une distance sur $\mathbb{R}^d$. Est-elle issue d'une norme ?

2. l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d)$ est-il complet ?

3. Décrire la topologie issue de d.

Exercice 6. Distance SNCF. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la distance suivante :

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si} \quad x = \alpha y,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pourquoi ce nom ?

2. Montrer que c'est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle issue d'une norme ?

3. Décrire les boules ouvertes de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d)$.

4. Cet espace métrique est-il complet ?

5. Comparer la topologie issue de d à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Sur $\mathbb{R}^d$, on note $B(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 < r\}$.

1. Montrer que $\{B(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ est une topologie sur $\mathbb{R}^d$. Est-elle séparée ?

2. Quelles sont les suites convergentes pour cette topologie ? Quel sont leurs limites ?

Exercice 8. Soit X un ensemble infini. Soit

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \mid U^c \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

2. Est-elle séparée ?

3. Montrer qu'une suite (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si elle prend un nombre fini de fois chaque valeur autre que x.

Exercice 9. Combien un ensemble à 3 éléments possède-t-il de topologies distinctes ?

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. On définit la **distance d'un point** $x \in X$ **à une partie** $A \subset X$ par

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Montrer que cette application est continue de (X, d) dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11. Distance TGV. Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la droite des abscisses par $D = \mathbb{R} \times \{0\}$. Sur cette droite on peut se déplacer deux fois plus vite qu'ailleurs. On définit la distance suivante :

$$d_{\mathrm{TGV}}(x, y) = \inf_{z_1, z_2 \in D} \left(\|x - z_1\|_2 + \|y - z_2\|_2 + \frac{\|z_1 - z_2\|_2}{2} \right),$$

puis la distance $d(x, y) = \min\big(\|x - y\|_2 \, , d_{\mathrm{TGV}}(x, y)\big)$.

1. Montrer que ce sont bien des distances sur $\mathbb{R}^2$. Sont-elle issues d'une norme ?

2. Calculer la distance $d(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Décrire les boules ouvertes de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d)$.

4. Cet espace est-il complet ?

5. Comparer la topologie issue de d à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Montrer que les espaces de suites $\ell^p(\mathbb{N})$ sont des espaces de Banach.

Exercice 13. On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

1. Montrer que $\|u\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$ et $\|u\|_1 := \int_0^1 |u|$ sont bien des normes sur E.

2. Montrer que la suite (u_n) de E définie par

$$u_n(x) := n \left(x - \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}[}(x) + \mathbf{1}_{]\frac{1}{2}, 1]}(x)$$

est de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$ mais n'est pas convergente pour cette norme.

3. Montrer en revanche que $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

4. Montrer que (u_n) est bornée pour la norme $\|.\|_\infty$.

5. Le suite (u_n) admet-elle une sous suite convergente ?

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

Sommaire

I Définition et propriétés

Définition 7.1 On appelle **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel E toute forme bilinéaire réelle $\langle .,. \rangle$ sur E qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. symétrie : $\forall u, v \in E, \quad \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,
2. positivité : $\forall u \in E, \quad \langle u, u\rangle \geq 0$,
3. caractère défini : $\forall u \in E, \quad \langle u, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$.

Sur un espace vectoriel complexe, on appelle **produit hermitien** toute forme bilinéaire complexe $\langle .,. \rangle$ sur E qui vérifie la symétrie conjuguée : $\forall u, v \in H$, $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ ainsi que les points (ii) et (iii).

Définition 7.2 Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire s'appelle **espace pré-hilbertien réel**. Un espace vectoriel complexe muni d'un produit hermitien s'appelle **espace pré-hilbertien complexe**.

Proposition 7.3 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Soit $(E, \langle .,. \rangle_E)$ un espace pré-hilbertien. On a

$$\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v\rangle_E| \leq \|u\|_E \, \|v\|_E \, .$$

En particulier, le produit scalaire est une forme bilinéaire continue.

Preuve : Considérer la fonction $\varphi(t) := \|u + tv\|_E^2$. □

Proposition 7.4

Soit $(E, \langle .,. \rangle_E)$ un espace pré-hilbertien. La quantité

$$\|u\|_E := \sqrt{\langle u, u\rangle_E}$$

définit une norme sur E appelé **norme pré-hilbertienne**. *On associe donc à E la topologie associée à cette norme. Tout espace pré-hilbertien est donc un e.v.n.*

Preuve : Exercice. □

Proposition 7.5 (***Identité du parallélogramme***)

Soit $(E, \langle ., . \rangle_E)$ un espace pré-hilbertien, sa norme vérifie l'identité du parallélogramme

$$\|u+v\|_E^2 + \|u-v\|_E^2 = 2\|u\|_E^2 + 2\|v\|_E^2, \quad \forall u, v \in E.$$

Vérifier cette identité est même une condition suffisante pour qu'un e.v.n. soit un espace pré-hilbertien.

Proposition 7.6 (***Identité du parallélogramme (réciproque cas réel)***)

Soit E un e.v.n. réel dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme. Alors E est un espace pré-hilbertien. Son produit scalaire associé est donné par

$$\langle u, v \rangle_E := \frac{1}{2}\left(\|u+v\|_E^2 - \|u\|_E^2 - \|v\|_E^2\right).$$

Preuve : Exercice. □

Définition 7.7 On appelle **espace de Hilbert** un espace pré-hilbertien complet pour sa norme pré-hilbertienne. C'est, en particulier, un espace de Banach.

Dans la suite de ce chapitre, H désigne un espace de Hilbert.

II Projection sur un convexe fermé

Théorème 7.8 (***Projection sur un convexe fermé***)

Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Il existe une unique application $p_C : H \to C$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall u \in H, \quad \|u - p_C(u)\|_H = \min_{v \in C} \|u - v\|_H.$$

Cette application s'appelle la **la projection orthogonale** *sur C. Elle est également caractérisée par la propriété équivalente suivante :*

$$\forall u \in H,\ v \in C, \quad \langle u - p_C(u), v - p_C(u) \rangle_H \leq 0.$$

Preuve : (Outils : identité du parallélogramme, complétude, suite de Cauchy) Soit $u \in H$. On note $d = \inf_{v \in C} \|u - v\|_H$. Existence du projeté : soit $u \in H$ et soit v_n une suite de C telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|u - v_n\|_H = d.$$

On note $d_n = \|u - v_n\|_H$ et $d = \inf_{v \in C} \|u - v\|_H$ de sorte que $d_n \to d$. On va montrer que (v_n) est une suite de Cauchy. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Posons $a = u - v_n$ et $b = u - v_p$. En appliquant l'identité de parallélogramme on a

$$\|a+b\|_H^2 + \|a-b\|_H^2 = 2\|a\|_H^2 + 2\|b\|_H^2$$
$$4\left\|u - \frac{v_n + v_p}{2}\right\|_H^2 + \|v_p - v_n\|_H^2 = 2d_n^2 + 2d_p^2.$$

Comme C est convexe, $(v_n + v_p)/2 \in C$ donc $\|u - (v_n + v_p)/2\|_H \geq d$. Ainsi,

$$\|v_p - v_n\|_H^2 \leq 2\left(d_n^2 + d_p^2 - 2d^2\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $d_n^2 \to d^2$, pour N assez grand, et pour tout $p, n \geq N$, $d_n^2 - d^2 \leq \varepsilon^2/4$ et $d_p^2 - d^2 \leq \varepsilon^2/4$. Ainsi $\|v_p - v_n\|_H \leq \varepsilon$. La suite (v_n) est bien de Cauchy. Comme H est complet, elle converge vers un $v \in H$ et comme C est fermé, $v \in C$. Ceci définit un projeté orthogonal de u sur C.

Unicité du projeté : Soit $u \in H$ et $v_1, v_2 \in C$ tels que $\|u - v_1\|_H = \|u - v_1\|_H = d$ en appliquant à nouveau l'identité de parallélogramme et la convexité de C, on obtient $\|v_1 - v_2\|_H \leq 0$ donc $v_1 = v_2$.

Propriété équivalente : Soit $u \in H$ et $v \in C$. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $v_t := (1 - t)p_C(u) + tv \in C$ par convexité. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\|u - p_C(u)\|_H^2 \leq \|u - v_t\|_H^2 &= \|u - p_C(u) - t(v - p_C(u))\|_H^2 \\ &\leq \|u - p_C(u)\|_H^2 - 2t\,\langle u - p_C(u), v - p_C(u)\rangle_H + t^2\,\|p_C(u) - v\|_H^2\end{aligned}$$

$$2\,\langle u - p_C(u), v - p_C(u)\rangle_H \leq t\,\|p_C(u) - v\|_H^2.$$

On fait tendre t vers 0 pour obtenir l'inégalité voulue. Réciproquement, si la seconde propriété est vérifiée, on a

$$\|p_C(u) - u\|_H^2 - \|v - u\|_H^2 = 2\,\langle u - p_C(u), v - p_C(u)\rangle_H - \|p_C(u) - v\|_H^2 \leq 0$$

et donc $\|p_C(u) - u\|_H \leq \|v - u\|_H$ pour tout $v \in C$. □

III Supplémentaire orthogonal

Définition 7.9 Soit H un espace de Hilbert, et F un s.e.v. de H. **L'orthogonal** de F est le s.e.v.

$$F^\perp := \{u \in H \mid \langle u, v\rangle_H = 0,\ \forall v \in F\}.$$

Proposition 7.10

Dans un espace de Hilbert H, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est un fermé.

Preuve : Exercice □

Définition 7.11 E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont **supplémentaires** dans E si tout élément de E peut s'exprimer de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On note alors $E = F \oplus G$.

Théorème 7.12 (*Supplémentaire orthogonal*)

Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v. fermé de H. L'orthogonal $F^\perp$ est un supplémentaire de F. C'est-à-dire

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Preuve : Comme de façon évidente, $F \cap F^\perp = \{0\}$, on doit seulement montrer que $H = F + F^\perp$. On note que F est un s.e.v fermé de H donc c'est un convexe fermé non vide. On note $p_F : H \to F$ le projeté orthogonal sur F. Soit alors $u \in H$. On écrit $u = p_F(u) + u - p_F(u)$. Par définition, $p_F(u) \in F$ et il reste à montrer que $u - p_F(u) \in F^\perp$. Pour tout $w \in F$,

$$\langle u - p_F(u), w \rangle_H = \langle u - p_F(u), w + p_F(u) - p_F(u) \rangle_H \leq 0$$

en utilisant la caractérisation de la projection, car $w + P_F(u) \in F$. De même $\langle u - p_F(u), -w \rangle_H \leq 0$ donc $\langle u - p_F(u), w \rangle_H = 0$ et $u - p_F(u) \in F^\perp$. □

IV Dualité dans les espaces de Hilbert

Il s'agit de décrire les formes linaires continues sur un espace de Hilbert, c'est-à-dire les éléments de H'. On peut déjà remarquer la propriété suivante (à faire en exercice très facile) :

Proposition 7.13

Pour tout $u \in H$, l'application $L_u : v \to \langle u, v \rangle_H$ est une application linéaire continue sur H à valeurs dans $\mathbb{K}$, donc un élément de H', et $\|L_u\|_{H'} = \|u\|_H$.

Le théorème de représentation de Riesz est un théorème fondamental qui fournit une réciproque à cette proposition et caractérise ainsi tous les éléments de H'.

Théorème 7.14 (*Riesz*)

Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $L \in H'$, il existe un unique élément $\ell \in H$ tel que

$$Lu = \langle L, u \rangle_{H',H} = \langle \ell, u \rangle_H \quad \forall u \in H.$$

De plus, $\|\ell\|_H = \|L\|_{H'}$.

Preuve : Voir DM 2. □

Ce théorème définit un isométrie entre H et H'. Une conséquence est que la convergence faible s'exprime plus facilement dans les Hilbert.

Corollaire 7.15

Une (u_n) suite d'un espace de Hilbert H converge faiblement vers $u \in H$ si et seulement si

$$\forall v \in H \qquad \lim_{n \to +\infty} \langle u_n, v \rangle_H = \langle u, v \rangle_H .$$

Exemple : Dans $L^2(\Omega)$ une suite (f_n) converge faiblement vers f si et seulement si pour tout $g \in L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_n \, g \to \int_\Omega f \, g.$$

Par exemple la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ (exercice).

Exemple : Dans $\ell^2(\mathbb{N})$ une suite de suite (u^n) converge faiblement vers une suite u si et seulement si pour tout $v \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p^n v_p \to \sum_{p\in\mathbb{N}} u_p v_p.$$

Par exemple la suite $(u^n)_n$ définie par $u_p^n = \delta_{np}$ pour tous p, $n \in \mathbb{N}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^2(\mathbb{N})$ (exercice).

Corollaire 7.16

Soit D une partie dense de H. Une suite bornée (u_n) de H converge faiblement vers u si et seulement si

$$\forall v \in D \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle u_n, v\rangle_H \to \langle u, v\rangle_H .$$

Preuve : Le sens direct est immédiat. On suppose pour le sens réciproque que $(u_n)_n$ est une suite de H bornée par une constante $C > 0$ et qu'il existe une partie dense D de H telle que

$$\forall v \in D \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle u_n, v\rangle_H \to \langle u, v\rangle_H .$$

Soit $v \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme D est dense dans H, il existe $v_\varepsilon \in D$ tel que $\|v - v_\varepsilon\|_H < \varepsilon$. Et d'après l'hypothèse, $\langle u_n, v_\varepsilon\rangle_H \to \langle u, v_\varepsilon\rangle_H$ donc pour un n assez grand

$$|\langle u_n, v_\varepsilon\rangle_H - \langle u, v_\varepsilon\rangle_H| < \varepsilon.$$

Pour n assez grand, on a donc

$$\begin{aligned}
|\langle u_n, v\rangle_H - \langle u, v\rangle_H| &\leq |\langle u_n, v\rangle_H - \langle u_n, v_\varepsilon\rangle_H| + |\langle u_n, v_\varepsilon\rangle_H - \langle u, v_\varepsilon\rangle_H| + |\langle u, v_\varepsilon\rangle_H - \langle u, v\rangle_H| \\
&\leq \|u_n\|_H \|v - v_\varepsilon\|_H + \varepsilon + \|u\|_H \|v - v_\varepsilon\|_H \\
&\leq (C + 1 + \|u\|_H)\varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui prouve $\langle u_n, v\rangle_H \to \langle u, v\rangle_H$ et donc $(u_n)_n$ converge faiblement. □

Exemple : Dans $L^2(\Omega)$ une suite bornée (f_n) converge faiblement vers f si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_n\, \varphi \to \int_\Omega f\, \varphi.$$

V Théorème de Lax-Milgram

Proposition 7.17

Une forme bilinéaire $a : H^2 \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si

$$\exists C > 0, \quad \forall u, v \in H, \quad |a(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H .$$

Preuve : Voir DM 2. □

Définition 7.18 On dit que a est **coercive** si

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall u \in H, \quad |a(u,u)| \geq \alpha \|u\|_H^2 .$$

Théorème 7.19 (***Lax-Milgram***)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si a est continue et coercive et si L est continue, alors le problème

$$\text{trouver } u \in H \quad \text{t.q.} \quad a(u,v) = Lv, \quad \forall v \in H \tag{7.1}$$

admet une unique solution. De plus cette solution dépend linéairement et continûment de L.

Preuve : Voir DM 2. □

Théorème 7.20 (***Banach-Alaoglu-Bourbaki pour les espaces de Hilbert***)

La boule unité fermée de H définie par

$$B_H := \{u \in H \mid \|u\|_H \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible. Par conséquent, de toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Preuve : On considère l'espace produit $X := \mathbb{R}^H$ (l'ensemble des fonctions de H dans $\mathbb{R}$) muni de la topologie produit. Pour tout $v \in H$, on note la projection $p_v : X \to \mathbb{R}$ définie par $p_v(f) = f(v)$. On considère également l'application linéaire injective

$$\begin{aligned} \Phi : (H, \text{faible}) &\to (X, \text{prod}) \\ u &\mapsto (v \mapsto \langle u, v\rangle_H). \end{aligned}$$

Cette application est continue. Pour le montrer, il suffit de montrer que pour tout $v \in H$, $p_v \circ \Phi$ est continue. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}$ alors

$$(p_v \circ \Phi)^{-1}(\omega) = \{u \in H \mid \langle u, v\rangle_H \in \omega\}.$$

est ouvert par continuité du produit scalaire pour la topologie faible. Ainsi Φ est continue. Son inverse $\Phi^{-1} : (\Phi(H), \text{prod}) \to (H, \text{faible})$ est également continue. Il suffit de montrer que pour tout $v \in H$, l'application $\pi_v : f \mapsto \left\langle \Phi^{-1}(f), v\right\rangle_H$ est continue. Notons $u : \Phi^{-1}(f)$, on a $\pi_v(f) = \left\langle \Phi^{-1}(f), v\right\rangle_H = \langle u, v\rangle_H = f(v) = p_v(f)$. Donc $\pi_v = p_v|_{\Phi(H)}$. Or tout les $p_v : X \to \mathbb{R}$ sont continues pour la topologie produit donc tout les $\pi_v : \Phi(H) \to \mathbb{R}$ aussi. Ainsi $\Phi : (H, \text{faible}) \to (\Phi(H), \text{prod})$ est un homéomorphisme.

Ainsi B_H est compacte pour la topologie faible si et seulement si $\Phi(B_H)$ est compacte pour la topologie produit. Or d'après le théorème de Riesz, $\Phi(B_H) = K_1 \cap K_2$ avec

$$K_1 := \{f \in X \mid |f(v)| \leq \|v\|_H \ \forall v \in H\} \quad \text{et} \quad K_2 := \{f \in X \mid f \text{ est linéaire}\}.$$

Or $K_1 := \prod_{v \in H} [-\|v\|_H, \|v\|_H]$ est compact comme produit de compact (Théorème de Tichonov) et K_2 est fermé dans X donc $\Phi(B_H)$ est compact dans X pour la topologie produit et donc B_H est compacte dans H pour la topologie faible. □

Chapitre 8

Espaces de Sobolev et EDP elliptiques

Sommaire

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

I Dérivée faible

Définition 8.1 On dit qu'une fonction $u : I \to \mathbb{R}^d$ est **localement intégrable** sur I si pour tout compact $K \subset I$, la fonction $u\mathbf{1}_K$ est intégrable. On note $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$

Exemple : La fonction $t \mapsto e^t$ est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Définition 8.2 Soit $u \in L^p(I)$ avec $p \in [1, +\infty]$. On dit que u admet une **dérivée faible** s'il existe une fonction localement intégrable v, c'est-à-dire mesurable sur I et intégrable sur tout compact inclus dans I, telle que

$$\int_I u\,\varphi' = -\int_I v\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

Cette notion étend la dérivée classique. La dérivée faible de u est notée $u' := v$. I

Remarque : On peut étendre cette définition à toute fonction de $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ qui est l'espace des fonctions intégrables sur tout compact $K \subset I$.

Exemple : Sur $I :=]-1, 1[$, la fonction $u : x \mapsto |x|$ admet la fonction $v := -\mathbf{1}_{]-1,0[} + \mathbf{1}_{[0,1[}$ comme dérivée faible sur $]-1, 1[$. En revanche, v n'admet pas de dérivée faible sur I.

Proposition 8.3 (*Unicité de le dérivé faible*)

Si v_1 et v_2 sont dérivées faibles d'une même fonction u alors $v_1 = v_2$ presque partout.

Proposition 8.4 ($u' = 0 \;\Rightarrow\; u = c$ *p.p.*)

Si $u \in L^p(I)$ admet une dérivée faible nulle, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $u = c$ presque partout sur I.

Preuve : Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\int_I \psi = 1$. Pour tout $w \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, la fonction $h := w - \beta_w \psi$ où $\beta_w := \int_I w$. Cette fonction est d'intégrale nulle donc si $x_0 \notin \mathrm{supp}(w)$ alors la fonction

$$\varphi(x) := \int_{x_0}^x h$$

a le même support que w est appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(I)$. Comme u admet un dérivé faible nulle, on a

$$0 = \int_I u\,\varphi' = \int_I u\,h = \int_I u\,(w - \beta_w\psi) = \int_I u\,w - \beta_w \int_I u\,\psi = \int_I w\left(u - \int_I u\,\psi\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $w \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, on a

$$u - \int_I u\,\psi = 0 \quad \text{p.p. sur } I$$

et donc u est égale à une constante presque partout sur I. $\square$

Corollaire 8.5

Si $u, v \in L^p(I)$ admettent des dérivés faibles égales presque partout, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $u = v + c$ p.p. sur I.

Proposition 8.6

Si $I :=]a, b[$ est un intervalle borné et $v \in L^1(I)$ alors $u(x) := \int_a^x v(t)dt$ est bornée sur I et admet u comme dérivée faible.

Preuve : Si $v \in C_c^\infty(I)$, la proposition est vraie. Soit $v \in L^1(I)$. Par densité de $C_c^\infty(I)$ dans $L^1(I)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v_\varepsilon \in C_c^\infty(I)$ tel que $\|v - v_\varepsilon\|_{L^1(I)} < \varepsilon$. On pose

$$u_\varepsilon(x) := \int_a^x v_\varepsilon$$

On remarque que pour tout $x \in I$, $|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \|v - v_\varepsilon\|_{L^1(I)} < \varepsilon$. Donc $\|u - u_\varepsilon\|_{L^1(I)} < (b-a)\varepsilon$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_I u\varphi' + \int_I v\varphi\right| &\leq \left|\int_I u\varphi' - \int_I u_\varepsilon\varphi'\right| + \left|\int_I u_\varepsilon\varphi' + \int_I v_\varepsilon\varphi\right| + \left|\int_I v_\varepsilon\varphi - \int_I v\varphi\right| \\
&\leq \int_I |u - u_\varepsilon||\varphi'| + \int_I |v - v_\varepsilon||\varphi| \\
&\leq \|\varphi\|_{C^1(I)} \left(\|u - u_\varepsilon\|_{L^1(I)} + \|v - v_\varepsilon\|_{L^1(I)}\right) \\
&\leq \|\varphi\|_{C^1(I)} \left(1 + b - a\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, on obtient bien que v est dérivée faible de u. $\square$

II Espaces de Sobolev

Dans cette section, u' désigne la dérivée faible de u.

Définition 8.7 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ pour $p \in [1, +\infty]$ est défini par

$$W^{1,p}(I) := \left\{u \in L^p(I) \mid u' \in L^p(I)\right\}.$$

On lui associe la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(I)} &:= \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty[\\ \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} &:= \max\left(\|u\|_{L^\infty(I)}, \|u'\|_{L^\infty(I)}\right). \end{aligned}$$

Définition 8.8 L'espace de Sobolev $H^1(I)$ est le cas particulier

$$H^1(I) := W^{1,2}(I) = \left\{u \in L^2(I) \mid u' \in L^2(I)\right\}.$$

On lui associe le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(I)} := \int_I u\, v + \int_I u'\, v'$$

et sa norme associée

$$\|u\|_{H^1(I)} := \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 8.9

Si I est borné, alors pour tout $p, q \in [1, +\infty]$, on a

$$W^{1,\infty}(I) \subset W^{1,q}(I) \subset W^{1,p}(I) \subset W^{1,1}(I).$$

Preuve : Facile en utilisant la règle d'inclusions des espaces $L^p(I)$.

□

Théorème 8.10 ($W^{1,p}$ *est complet*)

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach, en particulier, $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

Preuve : Soit (u_n) une suite de Cauchy de $W^{1,p}(I)$, c'est aussi une suite de Cauchy de $L^p(I)$ (Banach) donc converge vers u dans $L^p(I)$. De plus la suite (u_n') est aussi une suite de Cauchy de $L^p(I)$ donc converge vers $v \in L^p(I)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, on a

$$\int_I u\, \varphi' = \lim_{n \to \infty} \int_I u_n\, \varphi' = -\lim_{n \to \infty} \int_I u_n'\, \varphi = -\int_I v\, \varphi.$$

En effet, le support de φ étant compact, les fonctions utilisées dans l'égalité ci-dessus sont toutes intégrables et convergent bien puisque, sur le support de φ, les normes L^p sont plus fines que la norme L^1.

Cela implique que u admet une dérivée faible dans $L^p(I)$ égale à v presque partout. Ainsi (u_n) converge vers u dans $W^{1,p}(I)$. □

Proposition 8.11

Supposons I borné. Alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{I}\right)$ est dense dans $W^{1,p}(I)$ pour la norme de $W^{1,p}(I)$.

Preuve : On sait que $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est dense dans $L^p(I)$. Soient $u \in W^{1,p}(I)$ et $\varepsilon > 0$, $u' \in L^p(I)$ donc il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tel que $\|u' - v_\varepsilon\|_{L^p(I)} < \varepsilon$. On sait que pour $x_0 \in I$, $u(x) = \int_{x_0}^x u' + c$, p.p. sur I. On pose $u_\varepsilon(x) := c + \int_{x_0}^x v_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$. On a

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \int_{x_0}^x |v_\varepsilon - u'| \leq \left\|v_\varepsilon - u'\right\|_{L^p(I)} |x - x_0|^{1-1/p} \leq \varepsilon |x - x_0|^{1-1/p}$$

donc

$$\int_I |u_\varepsilon - u|^p \leq \varepsilon^p \int_I |x - x_0|^{p-1} \mathrm{d}x \leq C_p \varepsilon^p$$

où la constante C_p est bien finie à condition de I soit borné. Finalement, on a montré $\|u - u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(I)} \leq c\varepsilon$ pour une constante c dépendant de p. □

Remarque : Si I n'est pas borné, on peut montrer que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.

III Évaluation ponctuelle des fonctions de $W^{1,p}(I)$

Théorème 8.12

On suppose I borné. Alors, pour $1 \leq p \leq +\infty$, toute fonction $u \in W^{1,p}(I)$ admet un (unique) représentant continu $u_c \in \mathcal{C}^0\left(\overline{I}\right)$. De plus l'opérateur qui à u associe u_c est continu de $W^{1,p}(I)$ dans $\mathcal{C}^0\left(\bar{I}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{\bar{I}} |u_c| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall \tilde{u} \in W^{1,p}(I).$$

Preuve : On note $I =]a, b[$ et $v(x) := \int_a^x u'$. Cette fonction est continue sur $\bar{I}$ et admet $\tilde{u}'$ pour dérivée faible. Ainsi, $\tilde{u} - v$ est presque partout égale à une constante $k \in \mathbb{R}$. On pose alors $u = v + k$. C'est un représentant de $\tilde{u}$ qui appartient à $\mathcal{C}^0(\bar{I})$. Il est unique car un autre représentant continu serait égal à u presque partout donc partout.

Pour tout $x \in \overline{I}$,

$$\begin{aligned}
|u(x)| \leq |v(x)| + |k| &\leq \int_I |\tilde{u}'| + \frac{1}{b-a} \int |k| \leq \left\|\tilde{u}'\right\|_{L^p(I)} \|\mathbf{1}\|_{L^{p'}(I)} + \frac{1}{b-a} \int |u - v| \\
&\leq (b-a)^{\frac{1}{p'}} \left\|\tilde{u}'\right\|_{L^p(I)} + \frac{1}{b-a} \int |u - v| \\
&\leq \dots
\end{aligned}$$

□

Ce résultat est très important car il nous autorise à évaluer ponctuellement une fonction de $W^{1,p}$. On définit alors un l'opérateur de trace ou d'évaluation ponctuelle.

Définition 8.13 Soient I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Pour pour tout $x \in \overline{I}$ on définit l'opérateur de trace sur x par

$$\begin{aligned} \gamma_x : W^{1,p}(I) &\to \mathbb{R} \\ \tilde{u} &\mapsto u_c(x) \end{aligned}$$

Cet opérateur linéaire est bien défini et continu sur $W^{1,p}(I)$.

On peut alors définir de nouveaux espaces en utilisant l'opérateur de trace.

Définition 8.14 Soit $I :=]a, b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on définit

$$W_0^{1,p}(I) := \left\{ u \in W^{1,p}(I) \mid \gamma_a(u) = \gamma_b(u) = 0 \right\}.$$

C'est un s.e.v. fermé de $W^{1,p}(I)$ donc un espace de Banach. Le cas particulier

$$H_0^1(I) := \left\{ u \in H^1(I) \mid \gamma_a(u) = \gamma_b(u) = 0 \right\}$$

est particulièrement intéressant, c'est un sous espace de Hilbert de $H^1(0,1)$.

Afin de simplifier les notation, on pourra écrire dans la suite $u(x) := \gamma_x(u)$ pour tout $x \in \overline{I}$ et pour toute fonction $u \in W^{1,p}(I)$.

Théorème 8.15 (*Inégalité de Poincaré*)

Soit $I :=]a, b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \overline{I}$ et $u \in W^{1,p}(I)$, on a

$$\|u - \gamma_x(u)\|_{L^p(I)} \leq (b-a) \left\|u'\right\|_{L^p(I)}.$$

En particulier, si $u \in W_0^{1,p}(I)$, on a

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq (b-a) \left\|u'\right\|_{L^p(I)}.$$

Preuve : On considère le représentant continu de u. On a $u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)\mathrm{d}t$ donc

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x)| &\leq \int_x^y |u'(t)|\mathrm{d}t \leq \left\|u'\right\|_{L^p(I)} (b-a)^{1-1/p} \\ |u(y) - u(x)|^p &\leq \left\|u'\right\|_{L^p(I)}^p (b-a)^{p-1} \\ \int_I |u(y) - u(x)|^p \mathrm{d}y &\leq \left\|u'\right\|_{L^p(I)}^p (b-a)^p \\ \|u - u(x)\|_{L^p(I)} &\leq \left\|u'\right\|_{L^p(I)} (b-a). \end{aligned}$$

□

Proposition 8.16 (*IPP dans les Sobolev*)

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert borné. Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $u \in W^{1,p}(I)$, alors

$$\int_a^b u\,\varphi' = -\int_a^b u'\varphi + u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I}).$$

Les évaluations de u en a et b sont ici les traces $\gamma_a(u)$ et $\gamma_b(u)$.

Preuve : Comme I est borné, $W^{1,p}(I) \subset W^{1,1}(I)$, il suffit de montrer la proposition pour $u \in W^{1,1}(I)$. Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$, la formule est vraie par intégration par partie classique. L'idée est de l'étendre par un argument de densité. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$, on note

$$Lu := \int_a^b u\,\varphi' + \int_a^b u'\varphi - u(b)\varphi(b) + u(a)\varphi(a)$$

C'est une forme linéaire bien définie et continue sur $W^{1,1}(I)$. Par ailleurs, elle s'annule sur $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ qui est dense dans $W^{1,1}(I)$ donc elle est nulle sur $W^{1,1}(I)$. Ainsi $Lu = 0$ pour tout $u \in W^{1,1(I)}$ est la formule est vérifiée. □

Corollaire 8.17 (*Norme de Sobolev équivalente*)

Dans $W^{1,p}(I)$, pour tout $x \in \overline{I}$, la quantité $N_p(u) = (\|u'\|^p_{L^p(I)} + |u(x)|^p)^{1/p}$ est une norme équivalente à la norme $W^{1,p}(I)$.

De plus, la fonction $u \mapsto \|u'\|_{L^p(I)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(I)$ équivalente à la norme $W^{1,p}(I)$.

Preuve : On a déjà $N_p(u)^p \leq (\|u'\|^p_{L^p(I)} + C^p \|u\|^p_{W^{1,p}}) \leq \max(1, C^p)\, \|u\|^p_{W^{1,p}(I)}$ donc

$$N_p(u) \leq \max(1, C)\, \|u\|_{W^{1,p}(I)}\,.$$

D'autre part, on a $\|u\|_{L^p(I)} \leq \|u - u(x)\|_{L^p(I)} + \|u(x)\|_{L^p(I)} \leq (b-a)\,\|u'\|_{L^p(I)} + |u(x)|(b-a)^{1/p}$. On en déduit qu'il existe une constante k telle que $\|u\|^p_{L^p(I)} \leq k(\|u'\|^p_{L^p(I)} + |u(x)|^p)$. Ainsi

$$\|u\|^p_{L^p(I)} + \left\|u'\right\|^p_{L^p(I)} \leq (k+1)(\left\|u'\right\|^p_{L^p(I)} + |u(x)|^p)$$

et donc

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq (k+1)^{1/p} N_p(u).$$

□

Concluons cette section en mentionnant un corollaire du théorème 8.12 qui fait le lien entre dérivée faible et dérivée presque partout.

IV Formulation faible des EDP elliptiques

De nombreux problèmes physiques mais aussi issus d'autres domaines (biologie, finance, traitement d'images,...) conduisent à des modèles basés sur des équations au dérivés partielles de la forme

$$-u'' = f, \qquad -u'' + a\,u = f, \qquad -(c\,u')' + a\,u = f$$

en dimension 1 et en dimension supérieure :

$$-\Delta u = f; \qquad -\Delta u + a\,u = f; \qquad -\operatorname{div}(c\,\nabla u) + a\,u = f.$$

Ces problèmes posés dans un domaine borné régulier (Lipschitzien) Ω de $\mathbb{R}^d$ sont accompagnés de conditions au bord de la forme

$u = g$ (Dirichlet) ou $\nabla u \cdot n = g$ (Neumann) ou $\alpha\,u + \nabla u \cdot n = g$ (Robin) sur $\partial\Omega$

par exemple. Ils font partie de la classe des problèmes elliptiques (sous condition sur a et c).

La dérivation faible ainsi que la théorie des espaces de Sobolev donnent un cadre général qui permet de démontrer le caractère bien posé de ces problèmes. Par bien posé, on entend trois notions :

1. existence d'une solution u,
2. unicité de la solution,
3. (stabilité) continuité de la solution par rapport aux paramètres du problème.

Pour bien comprendre la démarche, nous allons développer complètement l'analyse sur un exemple de problème elliptique particulier.

1 Diffusion thermique en 1D - Conditions de Neumann homogène

On chauffe une barre métallique décrite par le segment $]0,1[$ au moyen d'une source de chaleur f. La chaleur est dissipée le long de la barre par rayonnement et les extrémités sont thermiquement isolées. Une modélisation simple conduit à considérer que la température u est solution du problème aux limites suivant :

$$(P) : \begin{cases} -u''(x) + r(x)\, u(x) = f(x), & \text{p.p.t. } x \in]0,1[\\ u'(0) = 0 & \\ u'(1) = 0 & \end{cases}$$

où r est le coefficient de dissipation par rayonnement supposé borné et minoré pas une constante positive. En d'autre terme, $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < +\infty$. La source f est supposée appartenir à $L^2(0,1)$. L'enjeu est de démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction u satisfaisant le problème (P), d'établir la continuité de cette solution par rapport à la source f ainsi que de donner sa régularité.

Une solution de (P) au sens classique du problème est une fonction admettant la régularité minimale pour que (P) ait un sens.

Définition 8.18 On appelle **solution forte** de (P) toute fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que u' admette une dérivé faible u'' et telle que les équations de (P) soient satisfaites.

Supposons que (P) admette une solution forte u. On peut multiplier l'équation par une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ (appelée fonction test) ce qui donne

$$-\int_0^1 u''\,\varphi + \int_0^1 r\,u\,\varphi = \int_0^1 f\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

On intègre alors par parties grâce à la proposition 8.16 on obtient

$$\int_0^1 u'\,\varphi' - u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0) + \int_0^1 r\,u\,\varphi = \int_0^1 f\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

On utilise les conditions sur le bord pour u et finalement u vérifie le problème suivant

$$(P_{\text{faible}}) : \quad \int_0^1 u'\,\varphi' + \int_0^1 r\,u\,\varphi = \int_0^1 f\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

appelé **formulation faible** ou **formulation variationnelle** du problème (P). On définit alors la forme bilinéaire

$$a(u,\varphi) := \int_0^1 u'\,\varphi' + \int_0^1 r\,u\,\varphi.$$

et la forme linéaire

$$L\,\varphi := \int_0^1 f\,\varphi.$$

Ainsi, la formulation faible se réécrit de manière condensé

$$(P_{\text{faible}}) : \quad a(u,\varphi) = L\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Dans l'idée d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, il faut maintenant identifier un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui contient $\mathcal{C}^1([0,1])$ et sur lequel la forme bilinéaire a sera bien définie, continue et coercive et la forme linéaire L continue.

On propose ici l'utilisation de l'espace $H^1(0,1)$. On a bien $\mathcal{C}^1([0,1]) \subset H^1(0,1)$ et de plus a et L sont bien définies sur $H^1(0,1)$. On a

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)} \left\|v'\right\|_{L^2(0,1)} + r_{\max} \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq (1 + r_{\max}) \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)}\end{aligned}$$

et

$$a(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 r\,u^2 \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(0,1)}$$

avec $\alpha = \min(1, r_{\min}) > 0$. De plus, L est continue sur $H^1(0,1)$ par Cauchy-Schwarz. On peut donc étendre (P_{faible}) sur $H^1(0,1)$:

$$(P_{\text{faible}}) : \quad a(u,v) = L\,v, \quad \forall v \in H^1(0,1).$$

Définition 8.19 On appelle **solution faible** de (P), toute solution de (P_{faible}).

Remarque : Si u est solution forte de (P), alors u est solution faible de (P).

Le problème (P_{faible}) vérifie ainsi toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Ainsi, nous obtenons l'existence et l"unicité d'une solution faible à notre problème noté $u \in H^1(0,1)$. Elle vérifie

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Grâce à cette démarche, on peut maintenant démontrer le caractère bien posé de problème initial (P).

Proposition 8.20

Le problème (P) admet une unique solution forte $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ qui vérifie

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Preuve : Existence : Le problème (P_{faible}) admet une solution $u \in H^1(0,1)$ qui vérifie l'inégalité proposée. La fonction u admet une dérivée faible $u' \in L^2(0,1)$. Comme

$$\int_0^1 u'\,\varphi' = -\int_0^1 (r\,u - f)\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(]0,1[).$$

et que $r\,u - f \in L^2(0,1)$ par définition de la dérivation faible, u' admet comme dérivée faible la fonction $u'' = ru - f \in L^2(0,1)$. On en déduit $u' \in H^1(0,1)$.

Donc u' a un représentant continu et u admet un représentant $\mathcal{C}^1([0,1])$ également appelé u.

En multipliant l'équation forte satisfaite par u par $\psi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et en intégrant par partie il vient

$$\int_0^1 u'\,\psi' + u'(0)\psi(0) - u'(1)\psi(1) + \int_0^1 r\,u\,\psi = \int_0^1 f\,\psi$$

or $\psi \in H^1(0,1)$ donc d'après la formulation faible on a aussi

$$\int_0^1 u'\,\psi' + \int_0^1 r\,u\,\psi = \int_0^1 f\,\psi$$

et donc $u'(0)\psi(0) - u'(1)\psi(1) = 0$. Ceci étant vrai pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^1([0,1])$, on obtient que $u'(0) = u'(1) = 0$. (On peut prendre $\psi(x) = x$ puis $\psi(x) = 1 - x$).

Unicité : Si deux solutions fortes u_1 et u_2 existent, alors elles sont aussi solutions faibles. Par unicité de la solution faible dans $H^1(0,1)$ elles sont égales presque partout donc elles sont égales. □

2 Schéma général d'analyse d'une EDP elliptique

De l'exemple rpécédent, on dégage un démarche générale d'étude théorique d'un problème d'EDP elliptque ordre avec conditions aux bords.

1. **Identifier la formulation faible** ($P_{\textbf{faible}}$) en supposant l'existence d'une solution régulière, en la multipliant par une fonction test régulière et en intégrant part parties. Il n'est pas nécessaire de justifier les calculs ici.
2. **Identifier l'espace de Hilbert** $\mathcal{H}$ nécessaire. Il doit être choisit de telle manière que
   - $\mathcal{H}$ contient l'ensemble des fonctions régulières utilisé en (1),
   - la formulation variationnelle étendue sur $\mathcal{H}$ vérifie toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.
3. **Appliquer le théorème de Lax-Milgram** pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution faible, ainsi que la continuité de la solution par rapport aux paramètres.
4. Quand c'est possible **montrer la régularité de la solution faible** et montrer que c'est aussi une solution forte.

Application : Reprendre la démarche pour le problème avec des conditions de bords de Neumann non homogènes :

$$(P) : \begin{cases} -u''(x) + r(x)\,u(x) = f(x), & \text{p.p.t. } x \in]0,1[\\ u'(0) = b_1 \\ u'(1) = b_2 \end{cases}$$

3 Conditions de Dirichlet homogène

On reprend de bout en bout la démarche avec le problème suivant :

$$(P) : \begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{p.p.t. } x \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f \in L^2(0,1)$.

(1) **Identification de la formulation faible :** On suppose qu'une solution $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ régulière existe et on la multiplie par $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$:

$$\int_0^1 u'\varphi' + u'(0)\varphi(0) - u'(1)\varphi(1) = \int_0^1 f\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Comme les termes $u'(0)$ et $u'(1)$ ne sont pas continus par rapport à u pour la norme H^1, ils vont nous bloquer dans les étapes suivantes. Pour éviter ce problème, on va seulement considérer les fonctions tests $\varphi \in \mathcal{C}_0^1([0,1]) := \{\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$. Dans ce cas on obtient

$$(P_{\text{faible}}) : \quad \int_0^1 u'\varphi' = \int_0^1 f\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1([0,1]).$$

(2) **Identification de l'espace de Hilbert :** On propose l'espace $H_0^1(0,1)$. En effet, $\mathcal{C}_0^1([0,1])$ est inclu dans cet espace. De plus son produit scalaire canonique est

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(0,1)} = \int_0^1 u'v'$$

ainsi $a(u,v) := \int_0^1 u'v'$ vérifie toutes les hypothèses de Lax-Milgram dans $H_0^1(0,1)$. De plus, comme on a

$$\left|\int_0^1 f\,v\right| \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\,\|v\|_{L^2(0,1)} \leq C\,\|f\|_{L^2(0,1)}\,\|v'\|_{L^2(0,1)}$$

grâce à l'inégalité de Poincaré, l'application $v \mapsto \int_0^1 f\,v$ est continue sur $H_0^1(0,1)$.

(3) **Application de Lax-Milgram :** le problème (P_{faible}) s'écrit

$$a(u,v) = L\,v \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$. Elle vérifie

$$\|u\|_{H_0^1(0,1)} \leq C\,\|f\|_{H_0^1(0,1)}\,.$$

(4) **Régularité de la solution faible :** On a $u' \in L^2(0,1)$ qui admet $-f$ pour dérivée faible donc $u' \in H^1(0,1)$ qui s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ donc $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. De plus $u \in H_0^1(0,1)$ donc $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$. La solution faible est donc aussi une solution forte.

Annexe A

Théorie des ensembles

Sommaire

Dans cette annexe, les parties I, II et III peuvent être considérées comme des éléments de culture mathématique non nécessaire à la bonne compréhension du cours. Les autres parties sont constituées de rappels sur les ensembles qu'il est important d'avoir en tête. Une lecture attentive en démontrant les propositions élémentaires est recommandée.

La théorie des ensembles est la théorie fondamentale à partir de laquelle sont construites la plupart des grandes branches des mathématiques comme l'arithmétique, l'analyse et la théorie des probabilités par exemple. Elle est notamment décrite par Cantor (fin 19ième).

Au debut du 20ième siècle les mathématiciens développent un système d'axiomes qui permet de faire fonctionner la théorie des ensemble telle que proposée par Cantor.

Les axiomes sont des propositions fondamentales à partir desquelles les mathématiques sont construites. Ces propositions ne se démontrent pas, c'est à dire qu'il n y a pas de raisonnement logique qui les prouvent à partir d'autres axiomes. Il sont supposés vrais. Ce sont des règles de bases que les objets mathématiques doivent vérifier pour que la construction théorique qui en découle soit la plus riche possible sans contenir de paradoxe, c'est-à-dire des démonstrations qui conduiraient à prouver qu'une proposition est à la fois vraie et fausse.

L'ensemble des axiomes que l'on choisit pour construire une théorie s'appelle un système axiomatique. Si l'on modifie ce système, on modifie toute la théorie, c'est-à-dire que des propositions vraies peuvent devenir fausses voir indécidables (n'admettant pas de démonstration dans cette théorie).

Heureusement, le sytème axiomatique sur lequel repose la théorie des ensembles fait aujourd'hui un large consensus. Ce système d'axiome est le système ZF (Zermelo-Fraenkel).

I Système axiomatique ZF

Dans la théorie des ensembles, tout les objets sont appelés ensembles. Il existe entre ces objets une relation dite d'**appartenance**. Si les lettres A et B désignent des ensembles, on note cette relation $A \in B$. Si deux lettres A et B désignent le même objet, on écrit $A = B$. A partir de la relation d'appartenance, on peu construire une nouvelle relation, l'**inclusion** : si pour tout ensemble a, $a \in A \Rightarrow a \in B$, on écrit $A \subset B$. On dit alors que A est un **sous-ensemble** de B.

A partir de ces notions très élémentaires, le systèmes ZF contient huit axiomes qui définissent les règles initiales de la théorie des ensembles. Ce système ZF peut se résumer de manière très synthétique de la manière suivante :

1. Axiome d'extensionalité : *Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.*

2. Axiome de la paire : *Si A et B sont deux ensembles, alors il existe un ensemble dont les éléments sont seulement A et B.* On le note $\{A, B\}$ si $A \neq B$ et $\{A\}$ sinon.

3. Axiome de la réunion : *Si $\mathcal{A}$ est un ensemble, alors il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments $\mathcal{A}$.* On le note

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

On remarque que grâce aux axiomes 2 et 3, on peut définir l'union classique de deux ensembles $A \cup B$. On fabrique $\{A, B\}$ et on lui applique l'axiome 3.

4. Axiome de l'ensemble des parties : *Si A est un ensemble, il existe un ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de A.* On le note $\mathcal{P}(A)$.

5. Axiome de compréhension : *Si A est un ensemble $p(a)$ est une proposition qui s'applique aux éléments de A. Alors il existe un sous-ensemble de A qui contient les éléments $a \in A$ tels que $p(a)$ est vraie.* On le note

$$\{a \in A \mid p(a)\}.$$

Attention, certaines propositions sont interdites, comme par exemple $\{a \in A \mid a \notin a\}$ qui constitue le paradoxe de Russell. On remarque aussi que cet axiome permet de définir l'intersection par $A \cap B = \{a \in A \mid a \in B\}$.

6. Axiome de l'ensemble vide : *Il existe un ensemble qui ne contient aucun ensemble.* On le note $\emptyset$.

Cet axiome permet notamment d'affirmer qu'il existe des ensembles.

7. Axiome de l'infini : *Il existe un ensemble A qui contient $\emptyset$ et tel que si $a \in A$, alors $\{a\} \in A$.*

Cet axiome et nécessaire pour construire l'arithmétique.

8. Axiome de fondation : *Si A est un ensemble non vide, il existe un élément $a \in A$ minimal pour l'appartenance, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de $b \in A$ tel que $b \in a$.*

Cet axiome évite notamment à un ensemble d'appartenir à lui même. En effet, si $A \in A$ alors l'ensemble $\{A\}$ est un contre-exemple pour l'axiome de fondation.

II Constructions élémentaires

A partir du système axiomatique ZF, un certain nombre d'objets mathématiques de base peuvent être déduit.

L'ensemble $\mathbb{N}$: On construit l'arithmétique à partir du système ZF. On note $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ etc... Grâce à l'axiome de l'infini, on sait qu'il existe un ensemble qui contient 0 et tout le successeurs de chaque éléments. On définit alors $\mathbb{N}$ comme le sous ensemble de tout les ensembles qui vérifient l'axiome de l'infini. Il est égal à $\{0, 1, 2, \dots\}$. Le successeur de chaque nombre n sera noté $n + 1 := \{n\}$. Notons que ce n'est pas la seule façon de construire les entiers naturels.

La récurrence : Le raisonnement par récurrence peut être déduit du système axiomatique :

Proposition A.1 (***Raisonnement par récurrence***)

Soit $p(n)$ une proposition qui porte sur tout les éléments n de $\mathbb{N}$. Si

- *$p(0)$ est vraie,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big(p(n) \Rightarrow p(n+1)\big)$ est vraie,*

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ est vraie.

Preuve : On note $E := \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ est fausse}\}$. On remarque que $0 \notin E$. On suppose que E est non vide. D'après l'axiome 8, il existe $n \in E$ minimal pour l'appartenance. Comme $n \neq 0$, on note m son prédécesseur, c'est à dire l'entier tel que $m + 1 = n$ (ou $n = \{m\}$). Comme n est minimal pour $\in$, nécessairement $m \notin E$ donc $p(m)$ est vraie. On a donc $p(m)$ vraie et $p(m+1)$ est fausse. C'est un contradiction du deuxième point. Ainsi E est vide est on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ est vraie. $\square$

Les couples : Soit A et B deux ensembles. On peut fabriquer des couples d'éléments de A et B par $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ avec $a \in A$ et $b \in B$ grâce à l'axiome 2. C'est un élément de $\mathcal{P}(A \cup B)$, ensemble qui existe grâce au axiomes 3 et 4. On définit alors l'ensemble des couples par

$$A \times B := \{\, c \in \mathcal{P}(A \cup B) \mid \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ c = \{a, \{a, b\}\} \,\}$$

Les fonctions : Soit A et B deux ensembles. Les fonctions de A vers B sont des associations entre les éléments de A et les éléments de B. Plus précisément, à chaque élément de A, on associe un unique élément de B c'est donc un ensemble particulier de couples. On définit une fonctions $f : A \to B$ comme une partie $f \subset A \times B$ telle que

$$\forall a \in A, \quad \exists!\, b \in B, \quad (a, b) \in f.$$

L'ensemble des fonctions de A dans B peux se définir par

$$B^A := \{\, f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid \forall a \in A,\ \exists!\, b \in B,\ (a, b) \in f. \,\}.$$

On peut alors donner les définitions classique de fonctions injective, surjective et bijective ainsi que la composition.

On définit alors la fonction d'incrémentation $i : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ par $i(n) = \{n\}$ on no

Les familles d'ensembles : Soit $\mathcal{A}$ et I deux ensembles. On appelle famille d'ensemble de $\mathcal{A}$ indexé par I toute fonction $f : I \to \mathcal{A}$ qui à $i \in I$ associe un ensemble $A_i \in \mathcal{A}$. On note cette famille $(A_i)_{i \in I}$.

Le produit d'une famille d'ensemble : On appelle produit de la famille $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble de toute les fonctions de $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ telle que pour tout $i \in I$, $f(i) \in A_i$:

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I,\ f(i) \in A_i \right\}.$$

III Axiome du choix

L'axiome du choix et en général cité à part de la théorie ZF, (pour former la théorie ZFC) car beaucoup de résultats mathématiques peuvent se montrer sans l'usage de de cet axiome. Contrairement aux huit axiomes de la théories ZF qui sont tous indispensables pour les résultats fondamentaux de la théorie des ensembles et de l'arithmétique. Ainsi, il est d'usage d'indiquer quand un résultat utilise l'axiome du choix dans sa démonstration. Il s'énonce comme suit :

9. Axiome du choix : *Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ d'ensembles non vides, il existe une fonction $\varphi : \mathcal{A} \to \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\varphi(A) \in A$.*

Cette fonction s'appelle fonction de choix. Pour chaque $A \in \mathcal{A}$, elle sélectionne un unique représentant de cette ensemble.

Proposition A.2 (*Formulation équivalente de l'axiome du choix*)

L'axiome du choix est équivalent aux énoncés suivants :

(i) Toute surjection possède un inverse à droite.

(ii) Tout produit $\prod_{i\in I} A_i$ d'une famille d'ensembles A_i non vides est non vide.

Preuve : (choix $\Rightarrow$ i) Soit $f : A \to B$ une surjection. Pour tout $b \in B$, on note $A_b := f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$ qui est non vide. On note $\mathcal{A} := \{A_b \in \mathcal{P}(A) \mid b \in B\}$ D'après l'axiome de choix, il existe une fonction choix $\varphi : \mathcal{A} \to \bigcup_{b\in\ B} A_b$ telle que pour tout $b \in B$, $\varphi(A_b) \in A_b$. On définit alors la fonction $g : B \to A$ par $g(b) = \varphi(A_b)$. On remarque que pour tout $b \in B$, $g(b) \in A_b$ donc $f(g(b)) = b$. Ansi $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ donc g est un inverse a droite de f.

(i $\Rightarrow$ ii) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides. On note

$$E := \left\{ (i,a) \in I \times \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; a \in A_i \right\}$$

On note alors $p_1 : E \to I$ la fonction définie par $p(i,a) = i$ et $p_2 = E \to \bigcup_{i\in I} A_i$ par $p_2(i,a) = a$. La fonction p_1 est une surjection donc d'après (i), elle admet un inverse à droite $g : I \to E$. Alors la fonction $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ définie par $f(i) = p_2(g(i))$ est un élément du produit $\prod_{i\in I} A_i$.

(ii $\Rightarrow$ choix) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'ensembles non vides. On note $I = \mathcal{A}$ et $f : I \to \mathcal{A}$ défini par $f(A) = A$. Ainsi $f = (A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides. D'après (ii), $\prod_{i\in I} A_i$ est non vide donc il existe $\varphi : \mathcal{A} \to \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\varphi(A) \in A$. □

IV Ensembles dénombrables

Définition A.3 On appelle **ensemble fini** tout ensemble E tel qu'il existe une fonction bijective $\varphi : E \to \{0, \ldots, n\}$. L'entier n s'appelle le cardinal de E et se note $\mathrm{card}(E)$. Par convention l'ensemble vide est fini et $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$.

Définition A.4 On appelle **ensemble dénombrable** tout ensemble E tel qu'il existe une fonction injective $\varphi : E \to \mathbb{N}$. Par convention l'ensemble vide est dénombrable.

Exemple : Les ensembles suivants sont dénombrables :
- les ensembles finis,
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,
- toute *union dénombrable* d'ensembles dénombrables,
- tout *produit cartésien fini* d'ensembles dénombrables.

Exemple : Les ensembles suivants ne sont pas dénombrables :
- $\mathbb{R}$,
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{R}$ (ici un produit cartésien dénombrable infini d'ensembles finis).

V Images directes et réciproques d'ensembles

Dans cette partie, on considère une fonction $f : E \to F$.

Définition A.5 Pour tout $A \subset E$, on appelle **image directe** de A par f la partie de F défini par

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Pour tout $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B la partie de E défini par

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Proposition A.6 (*Propriétés de l'image directe*)

Soient $A, A_1, A_2 \subset E$ on a

(i) si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$,

(ii) si f est injective, $f(A^c) \subset f(A)^c$.

(iii) si f est surjective, $f(A)^c \subset f(A^c)$.

(iv) si $g : F \to G$ alors $g \circ f(A) = g(f(A))$,

(v) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(vi) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ et on a égalité si f injective.

Preuve : Exercice. □

Proposition A.7 (*Propriétés de l'image réciproque*)

Soient $B, B_1, B_2 \subset F$ on a

(i) si $B_1 \subset B_2$, alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,

(ii) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

(iii) si $g : F \to G$ alors pour tout $C \subset G$, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$,

(iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Preuve : Exercice. □

Proposition A.8 (*Composition croisée*)

Soient $A \in E$ et $B \subset F$ on a

(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si f est injective.

(ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ avec égalité si f est surjective.

Preuve : Exercice. □

VI Images directes et réciproques d'ensembles de parties

Dans cette partie, on considère une fonction $f : E \to F$.

Définition A.9 Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **image directe de** $\mathcal{A}$ par f la partie de $\mathcal{P}(F)$ définie par

$$f(\mathcal{A}) := \{B \in \mathcal{P}(F) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Pour tout $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$, on appelle **image réciproque de** $\mathcal{B}$ par f la partie de $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Exercice 1. A-t-on $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ en général ? Sous quelle condition est-ce vrai ?

Proposition A.10 (*Monotonie*)

1. *Si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(E)$, $f(\mathcal{A}_1) \subset f(\mathcal{A}_2)$.*
2. *Si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(\mathcal{B}_1) \subset f^{-1}(\mathcal{B}_2)$.*

Preuve : Exercice. □

Le point important est l'analogue de la proposition A.8.

Proposition A.11 (*Composition croisée*)

Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ on a

(i) $f^{-1}(f(\mathcal{A})) \subset \mathcal{A}$ avec égalité si f est injective.

(ii) $\mathcal{B} \subset f(f^{-1}(\mathcal{B}))$ avec égalité si f est surjective.

Remarque : On a les inclusions inverses de celles de la proposition A.8.

Preuve : (i) Soit $A \in f^{-1}(f(\mathcal{A}))$. Cela signifie $A = f^{-1}(B)$ pour un B de $f(\mathcal{A})$. Mais $B \in f(\mathcal{A})$ si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ donc $A \in \mathcal{A}$ et $f^{-1}(f(\mathcal{A})) \subset \mathcal{A}$.

Réciproquement, si f injective, $A = f^{-1}(f(A))$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit donc $A \in \mathcal{A}$. Comme $A = f^{-1}(f(A))$, on en déduit $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{A}$ i.e. $f(A) \in f(\mathcal{A})$. Donc finalement, $A = f^{-1}(B)$ pour un $B \in f(\mathcal{A})$, ce qui signifie $A \in f^{-1}(f(\mathcal{A}))$ et $\mathcal{A} \subset f^{-1}(f(\mathcal{A}))$.

(ii) Si $B \in \mathcal{B}$, alors $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$, i.e. $B \in f(f^{-1}(\mathcal{B}))$. Réciproquement, soit $B \in f(f^{-1}(\mathcal{B}))$, ou autrement dit $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$. On en déduit que $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$ pour un B' de $\mathcal{B}$. Il s'ensuit $f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B'))$. Maintenant, si f est surjective, on en déduit d'après la proposition A.8 que $B = B'$ soit $B \in \mathcal{B}$, d'où $f(f^{-1}(\mathcal{B})) \subset \mathcal{B}$.

$\square$

Annexe B

Limites inférieures et supérieures

Sommaire

I Suites réelles

Définition B.1 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la **limite inférieure** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} x_p$$

et sa **limite supérieure** par

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} x_p.$$

Ces limites existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$ car les suites

$$\left(\sup_{p\geq n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \left(\inf_{p\geq n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont monotones (respectivement décroissante et croissante).

Exemple : On pose $x_n = 1 + (-1)^n$ calculer sa limite inférieure et sa limite supérieure.

Proposition B.2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On a

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Si la suite est bornée, les limites supérieure et inférieure sont réelles et ces deux valeurs sont les valeurs d'adhérence maximale et minimale de la suite. De plus, la suite converge si et seulement si ces deux valeurs coïncident et dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Preuve : Exercice.

□

II Suites de fonctions réelles

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles définie sur un ensemble Ω, on définit les limites supérieure et inférieure de la suite ponctuellement :

$$\left(\limsup_{n\to+\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in \Omega$$

et

$$\left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right)(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

L'intérêt de ces limites est qu'elles sont définies même lorsqu'il n'y a pas convergence et elles sont souvent utilisées pour montrer des étapes intermédiaires dans les théorèmes de convergence. Un exemple d'utilisation se trouve dans le Lemme de Fatou qui permet notamment de démontrer le théorème de convergence dominée.

III Suites de parties

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble non vide Ω. On peut définir une notion de limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'elle est monotone de la façon suivante :

Définition B.3

- Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante i.e. si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, on définit

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n;$$

- Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante i.e. si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n, on définit

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

On ne cherche pas à généraliser la notion de limite à d'autres cas, mais on définit des limites supérieure et inférieure de n'importe quelle suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon le même principe que celui utilisé pour les suites réelles.

Définition B.4 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble non vide Ω. On définit les limites inférieure et supérieure de la suite par

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p.$$

On remarque que $\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\left(\bigcap_{p\geq n} A_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, ce qui justifie l'emploi du terme de limite.

En outre, on vérifie aisément que, comme pour le cas des suites réelles, les limites supérieure et inférieure coïncident avec la notion de limite dans le cas monotone, i.e. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

Proposition B.5

Pour toute suite de partie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

Preuve : Soit $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad x \in \bigcap_{p\geq n} A_p \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq n, \quad x \in A_p \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists p \geq n, \quad x \in A_p \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in \bigcup_{p\geq n} A_p \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p \quad \Rightarrow \quad x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n. \end{aligned}$$

□

IV Exercices

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

2. En déduire que si

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n,$$

alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite disjointe de parties de Ω. Calculer $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$. On pourra commencer par l'exemple

$$A_n = [n, n+1[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $A_n = [0, x_n[$. Calculer les limites inférieures et supérieures de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, plus précisément on étudiera uniquement les exemples :

$$(a)\ x_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (b)\ x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (c)\ x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \text{ et } x_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque.