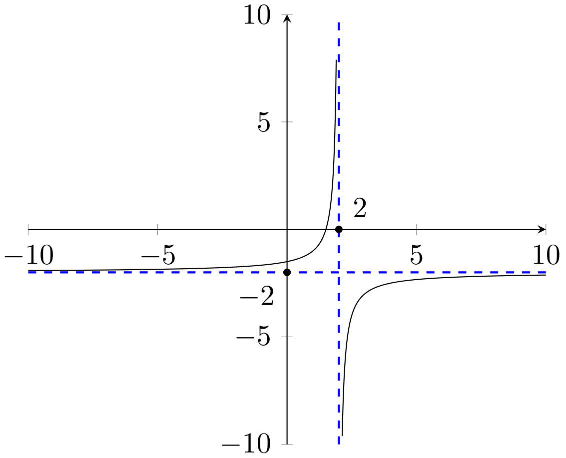
Corrigé du TD2

1 Conjugaisons

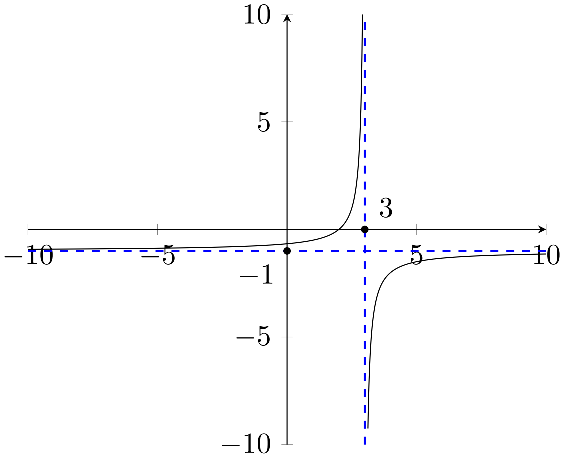
Exercice 1. On a $F_M = \frac{2x-3}{2-x}$. La fonction n'est pas défini en 2. Son dérivé est

$$F'_M(x) = \frac{2(2-x)+(2x-3)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

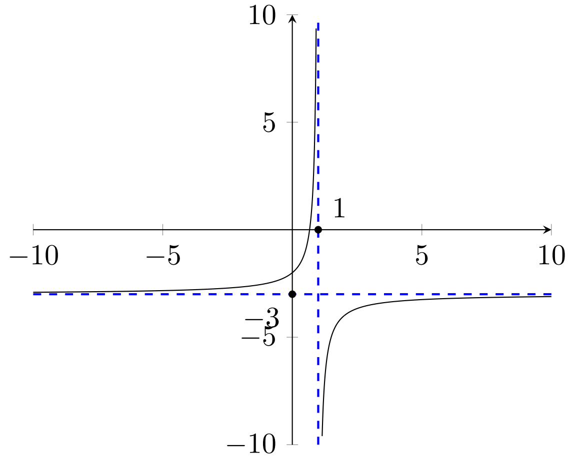
qui est strictement positive sur la domaine de définition de F_M. Elle est donc strictement croissante et a des asymptotes verticales en 2. Il est direct de vérifier que F_M converge vers -2 pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$. Son graphe est donc :



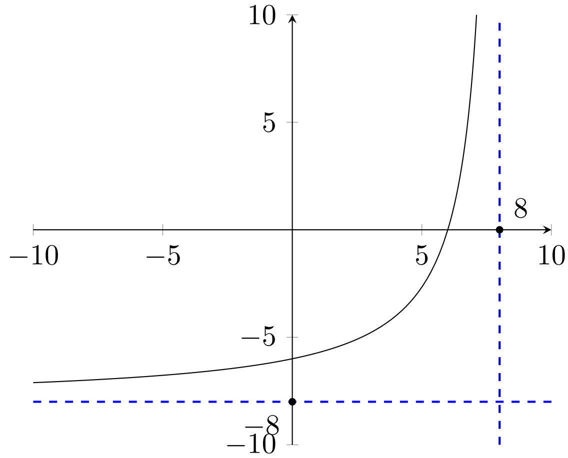
Exercice 2. $F_T = x + 1$. $M^T = TMT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.



Exercice 3. On remarque qu'on a obtenu le graphe de M^T à partir du graphe de M en translatant par $(1, 1)$. Autrement dit, on a appliqué F_T sur chaque cordonnée. On a $F_{T^{-1}}(x) = x - 1$ et donc le graphe de $F_{MT^{-1}}$ est :



Exercice 4. On a $M^S = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$ et donc :



On remarque qu'on obtient encore le même graphe, mais cette fois on a appliqué $F_S(x) = 4x$ sur les deux axes. Alors conjuguer par une matrice A préserve la fonction mais transforme l'espace sur lequel on agit par F_A.

2 Les groupes $SL_2(\mathbb{R})$ et $SU(1,1)$ sont isomorphes

Exercice 5. On remarque que pour tout A, $c(A)^{J^{-1}} = JJ^{-1}AJJ^{-1} = A$. Alors la fonction $B \mapsto B^{J^{-1}}$ est une fonction reqiproque de c et c est bijective sur son image. Montrons que l'image est bien $SU(1,1)$. On va montrer par la double inclusion, c'est-à-dire on va montrer que $c(SL_2(\mathbb{R})) \subset SU(1,1)$ et $c^{-1}(SU(1,1)) \subset SL_2(\mathbb{R})$.

Prenons d'abord une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. On a $J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ et donc :

$$\begin{aligned} c(A) = JAJ^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-ic & b-id \\ a+ic & b+id \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-ic+ib+d & a-ic-ib-d \\ a+ic+ib-d & a+ic-ib+d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d+i(b-c) & a-d-i(b+c) \\ a-d+i(b+c) & a+d-i(b-c) \end{bmatrix} \in SU(1,1) \end{aligned}$$

Maintenant, soit $B = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in SU(1,1)$. On obtient:

$$\begin{aligned} c^{-1}(B) = J^{-1}BJ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+b & i(b-a) \\ \bar{a}+\bar{b} & i(\bar{a}-\bar{b}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+\bar{a}+b+\bar{b} & i(b-\bar{b}-a+\bar{a}) \\ i(a-\bar{a}+b-\bar{b}) & a-\bar{a}-b+\bar{b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Re(a)+\Re(b) & \Im(b)-\Im(a) \\ \Im(a)+\Im(b) & \Re(a)-\Re(b) \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Exercice 6. On a $c(A)c(B) = JAJ^{-1}JBJ^{-1} = JABJ^{-1} = c(AB)$.

Exercice 7. Pour $x \in \mathbb{R}$ on va calculer le valeur absolu et l'argument de $F_J(x)$. On a $|F_J(x)| = \frac{|x-i|}{|x+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ donc l'image est contenu dans le cercle unitaire. De plus

$$\arg(F_J(x)) = \arg(x-i) - \arg(x+i) = -\arccos(\frac{x}{x^2+1}) - \arccos(\frac{x}{x^2+1}) = -2\arccos(\frac{x}{x^2+1}).$$

L'image de $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est $]-1,1[$. L'image de cette intervalle par arccos est $]-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2}[$. Donc l'image de $\mathbb{R}$ par F_J est les points du cercle d'argument différent de $-\Pi$, c'est-à-dire le cercle unitaire privé du point -1.

On peut donc identifier le cercle avec $\mathbb{R}$ avec une point bonus qu'on appellera ∞. On observe de plus que les limites de F_J vers $+\infty$ et $-\infty$ sont -1.

Le but est d'appliquer la conclusion d'exercice 4 pour considérer l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ plutôt que celle de $SU(1,1)$. Il nous faut donc aussi de définir F_A sur ∞. Sachant que $F_{c(A)}$ est une bijection du cercle dans le cercle, F_A doit être une bijection de $\mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ dans lui-même. On a donc pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $F_A(\infty) = \frac{a}{c}$ et $F_A(-\frac{d}{c}) = \infty$.

3 Classification des éléments de $SL_2(\mathbb{R})$

Exercice 8.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ad-Bc & aB-Ab \\ Cd-cD & aD-bC \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} adA-bcD+bdC-acB & \dots \\ \dots & -bcA+adD-bdC+acB \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dont la trace est $A+D$.

Exercice 9. Par hypothèse, il existe un point x qui n'est pas un point fixe de F_A. Soit A' avec $-\frac{d'}{c'} = x$. Alors, quitte à remplacer A par $A^{A'}$, on peut supposer que ∞ n'est pas un point fixe de F_A. Alors tout points fixes (s'ils existent) sont dans $\mathbb{R}$, et de plus $\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$ donc $c \neq 0$. On calcule

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x \iff ax+b = cx^2+dx \iff cx^2+(d-a)x-b = 0$$

dont la determinante est

$$(a-d)^2 + 4bc = (a-d)^2 + 4ad - 4 = (a+d)^2 - 4 = tr(A)^2 - 4.$$

Alors on a 0, 1 et 2 points fixes si le valeur absolu de la trace est respectivement plus petit, égal ou plus grand que 2.

Exercice 10. Pareil, si x est le point fixe et A' vérifie $\frac{a'}{c'} = x$, quitte à conjuguer par A', on peut supposer $x = \infty$. Ceci implique $c = 0$. On a donc $a + d = \pm 2$ et $ad - b0 = ad = 1$, d'où $a = d = \pm 1$. Alors A est de la forme $\begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ et $F_A(x) = x \mp \lambda$. Les matrices paraboliques de $SU(1,1)$ sont donc conjuguées à cela et elles fixent un point et déplacent la reste selon la même direction.

Exercice 11. Soient x et y les deux points fixes. Si l'un des deux est ∞, soit y sens perdre de généralité, on peut conjuguer par $\begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. S'ils sont tout les deux différents du point ∞, considérons la matrice $A' = \frac{1}{y-x} \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On a $F_{A'}(\infty) = y$ et $F_{A'}(0) = x$. Alors il suffit de conjuguer par A'^{-1}.

On a donc que A fixe 0 et ∞. Cela implique $b = c = 0$. Alors $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$ et $F_A(x) = \lambda^2 x$. Une matrice hyperbolique de $SU(1,1)$ a donc deux points fixes - un répulsif et un attractif, et la fonction $F_{c(A)}$ déplace les points selon la direction du point répulsif vers le point attractif.

Exercice 12. Comme indiqué, on va commencer par chercher une matrice $M \in SL_2(\mathbb{R})$ qui envoi les points fixes de A sur les points fixes de R_α. On remarque d'abord que pour une matrice à coefficients réels, les points fixes non-réels sont toujours des complexes conjugués - en effet, ils sont des solutions d'une équation quadratique en coefficients réels. Il suffit donc d'envoyer un point fixe de A sur un point fixe de R_α. On note les premières $X \pm iY$ (avec $Y > 0$) et on calcule que les deuxièmes sont $\pm i$. On note $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et on cherche donc des réels a, b, c, d tels que $\frac{ai+b}{ci+d} = X + iY$ et $ad - bc = 1$. On a donc on a la système d'équations:

$$\begin{cases} b = dX - cY \\ a = cX + dY. \end{cases}$$

On peut donc choisir c et d tels qu'on veut et a et b seront definis à partir d'eux. Il reste à montrer qu'on peut choisir c et d de sorte à avoir $ad - bc = 0$. On a

$$ad - bc = cdX + d^2Y - cdX + c^2Y = Y(c^2 + d^2).$$

Car $Y \neq 0$ par hypothèse il suffit de choisir $c^2 + d^2 = \frac{1}{Y}$.

Alors A est conjugué à une matrice R avec points fixes complexes $\pm i$. Il ne reste qu'à montrer qu'elle est une rotation, ce qui est un calcul immédiat.