Corrigé TD7

Exercice I.

1. Soit $Av = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$. Alors $u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j > 0$ et

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \left(v_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n v_j = 1.$$

2. On a

$$\|Tv - Tw\| = \|(1-c)A(v-w)\| = (1-c)\|Au\|$$

pour $u = v - w$. On re-fait le calcul de la première question pour Au :

$$\|Au\| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |u_j| = \sum_{j=1}^n |u_j| = \|u\|$$

ce qui conclut la question.

3. Application directe du théorème du point fixe.

4. Par exemple, pour $b = 0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, le point fixe est $v = 0$.
Alternativement, pour $c = 1$, le point fixe est b qui n'est pas nécessairement stochastique.

5. Pour $u = Tv$ on a

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n b_i + (1-c) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{i=1}^n b_i + (1-c) \sum_{j=1}^n v_j.$$

Alors une condition est $\sum_{i=1}^n b_i = c$. L'autre est pour tout i, $u_i \ge 0$, ce qui est équivalent à $b_i \ge (c-1)\min_v(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j) = (c-1)\min_j a_{ij}$.

6.

a) D'après la dernière question, $b = (c/n, c/n, \dots, c/n)^T$. La deuxième condition est trivialement vérifiée car $b_i = c/n > 0$ pour tout i.

b) D'après le théorème du point fixe, il est attractif. Alors tout orbite converge vers lui, en particulier aussi les orbites commençant par un point stochastique. Mais dans le cas qu'on est en train de considérer ces orbites restent dans l'ensemble des points stochastiques. Alors le point fixe est dans l'adhérence de la dernière, mais comme il est fermé, il est égal à son adhérence, ce qui conclut la question.

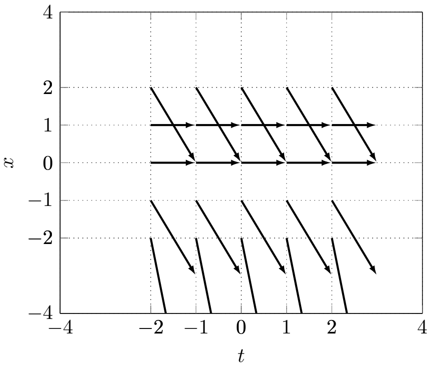
Exercice II.

1. Les solutions constantes sont $y = 0$ et $y = 1$.

2. Une solution non-constante ne prend pas les valeurs 0 et 1. On ecrit donc $\frac{y'}{y-y^2} = 1$ et donc $\frac{y'}{y} + \frac{y'}{1-y} = 1$. Alors

$$|\frac{y}{1-y}| = e^{t+c} \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = Ce^t \Leftrightarrow y = \frac{Ce^t}{Ce^t+1}.$$

3. Le champ de vecteurs associé est le suivant :



4. On a $\frac{y}{1-y} = Ce^t$. Donc on a

a) $y(2) = -2 \Rightarrow C = \frac{-2}{1-(-2)}e^{-2} = -\frac{2}{3}e^{-2}$. Elle a une asymptote verticale en t_1 tel que $Ce^{t_1} + 1 = 0$, donc en $t_1 = 2 + \ln(3/2) > 2$. Alors l'intervalle maximale de définition est $] - \infty, 2 + \ln(3/2)[$.

b) $y(1/2) = 2 \Rightarrow C = -2e^{-1/2}$. Elle a une asymptote verticale en $1/2+\ln(1/2) < 1/2$. Alors l'intervalle maximale de définition est $]1/2 + \ln(1/2), +\infty[$.

c) $y(2) = 2 \Rightarrow C = -2e^{-2}$. Elle a une asymptote verticale en $2 + \ln(1/2) < 2$. Alors l'intervalle maximale de définition est $]2 + \ln(1/2), +\infty[$.

5. Pour $0 < y_0 < 1$ on a $Ce^{t_0} = \frac{y_0}{1-y_0} > 0$. Alors $C > 0$ et $Ce^t + 1$ ne s'annule pas et diverge vers $+\infty$ pour $t \to +\infty$. La solution est donc défini sur tout $\mathbb{R}$ et de plus, $y(t) = \frac{Ce^t}{Ce^t+1} = 1 - \frac{1}{Ce^t+1} \to 1$ quand $t \to +\infty$.

6. C'est une conséquence directe du fait qu'ils sont des solutions de l'équation précédente et que $1/t > 0$ pour $t > 0$.

7. On a $\beta'(t) = 1/t^2$ et $f(t, \beta(t)) = -1/t - 1/t^2 + 1/t = -1/t^2 < 1/t^2$ pour $t \neq 1$. Alors β est une barrière supérieure forte.

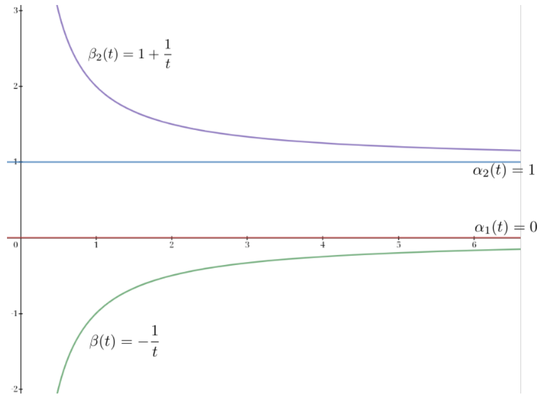
8. On a $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 1 - 2y \geq 1 > 0$ pour $y \leq 0$. Alors par la théorème de l'anti-entonnoir, on a la conclusion.

9. Considérons la fonctions $\beta_2(t) = 1 + 1/t$. C'est une solution de l'équation différentielle, et c'est donc une barrière supérieure. Ainsi on a $y(t) < \beta_2(t), \forall t > t_0$.

Si $y(t) \in]0, 1[$, on a $y(t) > y^2(t)$ et donc nécessairement $y'(t) > 0$. y est donc strictement croissante tant que $y(t) \in]0, 1[$.

Supposons que y est majorée par 1. Comme y est croissante, y tend vers un réel $l \in]0, 1]$. Comme y est $\mathcal{C}^1$ et solution de l'équation différentielle, y' converge également, et $\lim_{t\to\infty} y'(t) = l - l^2 \in [0, 1]$. Montrons par l'absurde que $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$: Notons $l' = \lim_{t\to\infty} y'(t)$ et supposons $l' > 0$. Soit $t_1 > t_0$ tel que $\forall t > t_1, \quad \frac{l'}{2} \leq y'(t) \leq l' + \frac{l'}{2}$. Il vient :

$$\forall t > t_1, \qquad y(t) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t} y'(s)\mathrm{d}s \geq y(t_1) + \frac{l'}{2}(t - t_1)$$



et donc y tend vers l'infini, c'est une contradiction et nécessairement $l' = 0$. Mais alors, comme on a $l' = l - l^2$, il vient $l = 0$ ou $l = 1$. Comme y est croissante et $y_0 > 0$, on a nécessairement $l = 1$ et en conclusion y tend vers 1.

Supposons à l'inverse que y n'est **pas** majorée par 1. Il exite alors $t_2 > t_0$ tel que $y(t_2) \geq 1$, et comme α_2 et β_2 sont respectivement des barrières inférieures et supérieures, on a $\forall t > t_2, \quad 1 \leq y(t) < 1 + 1/t$, donc y tend vers 1.

10. On remarque que la solution de l'équation avec la condition initiale $y(1) = 2$ est justement β_2.