UFR Mathématiques — Sorbonne Université

1M025 Partie I : Homéomorphismes du cercle — mars 2019

TD1 : Homéomorphismes, relèvements, groupes

Exercice 1. Rappeler les définitions d'un homéomorphisme, d'un homéomorphisme du cercle, et d'un groupe. Donner deux paramétrisations du cercle.

Exercice 2. Donner des exemples de :

- fonction strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non surjective.
- fonction injective sur $\mathbb{R}$, non strictement monotone.
- fonction continue injective, non strictement monotone sur son domaine de définition.

Exercice 3. On note respectivement $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ le cercle et le carré unité dans $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1\}, \qquad \mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(|x|,|y|) = 1\}$$

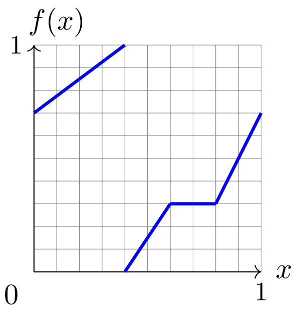
Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections, et donner l'expression de leur réciproque.

$$g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (x,y) & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) \end{array} \qquad\qquad h \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{S}\backslash\{(-1,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & \frac{y}{x+1} \end{array}$$

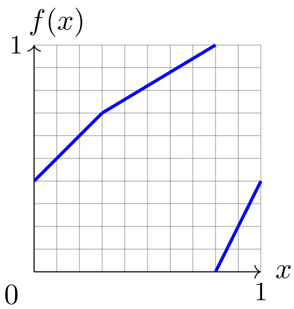
Indication : pour h, on pourra poser $h(x,y) = \tan(\frac{\theta}{2})$, avec $\theta \in]-\pi,\pi[$.

En déduire une paramétrisation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}\backslash\{(-1,0)\}$ du carré unité.

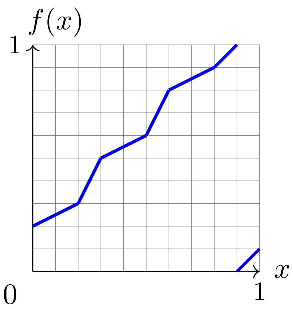
Exercice 4. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des homéomorphismes du cercle ? Justifier.



a)



b)



c)

d) $f(x) = x + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}$ **e)** $f(x) = \sinh(x)$ **f)** $f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

Exercice 5. Suite homographique.

1. On considère la fonction homographique définie par :

$$\forall x \in]-4, +\infty[, \quad f(x) = \frac{5x+3}{x+4}$$

   (a) Montrer que f a exactement deux points fixes α et β ($\alpha > \beta$) sur $]-4, +\infty[$.

   (b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et tracer son graphe.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et croissante.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

3. On pose $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ pour tout $n \geq 0$.

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison.
   (b) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 2(b).

Exercice 6. Montrer que l'ensemble des transformations affines non constantes sur $\mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 7. On considère les applications de $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ dans lui-même, définies par :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{f}_1(x) = x & \mathrm{f}_2(x) = \frac{1}{1-x} & \mathrm{f}_3(x) = \frac{x-1}{x} \\ \mathrm{f}_4(x) = \frac{1}{x} & \mathrm{f}_5(x) = 1-x & \mathrm{f}_6(x) = \frac{x}{x-1} \end{array}$$

Montrer que l'ensemble de ces six applications est un groupe pour la loi $\circ$.