TD5: Cauchy-Lipschitz, Barrières

1 Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. On considère les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} t^3 x'(t) = x(t), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Pour chacun des problèmes :

a) Construire une solution non-nulle.

b) Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz ? Pourquoi?

2 Barrières

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) \geq 1$ pour tout x.. Considérons l'équation différentielle $(*)\quad y' = y^2 f - 1$.

Exercice 2. Montrer que les droites d'équation $y = 1$ et $y = -1$ sont des barrières inférieures. Montrer que l'axe des abscisses est une barriere supérieure.

Exercice 3. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale $\phi :]a, b[\to \mathbb{R}$ de l'équation $(*)$ telle que $\phi(x_0) = y_0$. Montrer que les solutions sont croissantes dans chacun des demi-plans $y \geq 1$ et $y \leq -1$.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 - 1$.

Exercice 5.

a) On suppose $y_0 > 1$. Montrer que b est un nombre réel.

b) On suppose $y_0 \geq 1$. Montrer que $a = -\infty$.

c) Montrer que si $y_0 \leq 0$, alors $b = +\infty$ et que si $y_0 < -1$, alors a est un nombre réel.

Exercice 6. Montrer qu'il y a des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et bornées.

Exercice 7. Représenter sur un même dessin les différents types de solution maximale qui ont été trouvés.