TD7

Exercice I.

On suppose $A = (a_{ij})_{n\times n}$ est une matrice stochastique ($a_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ pout tout j). On considère l'application $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par

$$Tv = (1-c)Av + b,$$

où $b = (b_1, \cdots, b_n)^T$ est un vecteur fixé, et $0 < c \leq 1$ est une constante.

1. Montrer que si $v = (v_1, \cdots, v_n)^T$ est un vecteur stochastique ($v_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n v_i = 1$) alors Av est aussi un vecteur stochastique.
2. Montrer que T est contractante de rapport $1-c$, c'est à dire que, pour tout $v, w \in \mathbf{R}^n$ on a
$$||Tv - Tw|| \leq (1-c)||v - w||.$$
On utilise la norme $||v|| = \sum_{i=1}^n |v_i|$.
3. En déduire qu'il existe un seul point fixe de T qu'on notera $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$.
4. Donner un exemple d'une application $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ comme ci-dessus tel que le point fixe x ne soit pas un vecteur stochastique.
5. Écrire les conditions sur b pour que l'image par T de tout vecteur stochastique soit stochastique.
6. On suppose maintenant que toutes les composantes de b sont égales.
   (a) Déterminer b pour que l'image par T de tout vecteur stochastique soit stochastique.
   (b) Montrer alors que le point fixe de T est un vecteur stochastique.

Exercice II.

On considère l'équation

$$y'(t) = y(t) - y(t)^2.$$

1. Quelles sont les solutions constantes?
2. Décrire toutes les solutions non-constantes.
3. Tracer dans un plan (t, y) le champ de directions de l'équation.

4. Quelles sont les solutions avec conditions initiales $y(2) = -2$, $y(1/2) = 2$, $y(2) = 2$? Pour chacune des solutions expliciter son intervalle maximal de définition. Tracer dans le plan ces solutions.

5. Montrer que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$ pour une solution avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $0 < y_0 < 1$.

   On considère maintenant l'équation :

$$y'(t) = y(t) - y(t)^2 + \frac{1}{t} = f(t, y(t)).$$

6. Montrer que les fonctions $\alpha_1(t) = 0$ et $\alpha_2(t) = 1$ sont des barrières inférieures fortes pour $t > 0$.

7. Montrer que la fonction $\beta(t) = -1/t$ est une barrière inférieure forte pour $t > 0$.

8. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation comprise entre $\alpha_1(t)$ et $\beta(t)$.

9. Montrer que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$ pour une solution avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $0 < y_0 < 1$.

10. Que pouvez-vous dire de la solution de l'équation avec condition initiale $y(1) = 2$.