Feuille TD 1

<u>Rappel</u> : • A est symétrique si ${}^tA = A$

si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ${}^tA = (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$.

• A inversible si $\exists B$, $AB = BA = I_n$

et on note $B = A^{-1}$ l'inverse de A.

caractérisation utile : A inversible ssi $\det A \neq 0$.

• A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists P$ inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

• A nilpotente si $\exists k \geq 1$ entier, tel que $A^k = 0$

• A orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

$\boxed{\text{Exo 2}}$ Pour chacune des matrices, déterminer si elles sont (a) symétrique (b) inversible (c) diago (d) nilpotente (e) orthogonale.

$$A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

A est symétrique. A inversible car $\det A = 1 \neq 0$

ou bien : A est son propre inverse.

A est diagonale donc diagonalisable.

A n'est pas nilpotente car $A^k = I_n \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

$${}^tAA = {}^tI_n I_n = I_n . I_n = I_n$$

donc orthogonale.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

donc ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$ donc B symétrique

. $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 1 \times 1$

$= -1 \neq 0$

donc B inversible.

. B diagonalisable ?

<u>Rappel</u> : Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, alors la matrice est diagonalisable.

$$P_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= x(x-1) - 1$$

$$= x^2 - x - 1 \qquad \text{(second degré)}$$

On résoud $P_B(x) = 0$.

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ solutions réelles distinctes.

donc P_B est scindé à racines simples donc B est diagonalisable.

- B a des valeurs propres non nulles, donc B n'est pas nilpotente. (exemple de matrice nilpotentes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

- $${}^tBB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc B pas orthogonale.

- $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{C}$.

${}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -C$ donc C n'est pas symétrique (mais antisymétrique).

$$\det C = 0 \times 0 - 1 \times (-1)$$
$$= 1 \neq 0$$

donc C est inversible.

$$P_C(x) = \det(C - xI_2)$$

(on trouve aussi la convention $P_A(x) = \det(xI_n - A)$)

$$= \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 1$$

$$= (x+i)(x-i)$$ scindé sur $\mathbb{C}$. à racine simples

donc C diagonalisable sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
(mais pas diagonalisable sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car P_C non scindé sur $\mathbb{R}$)

- C a des valeurs propres non nulles donc C n'est pas nilpotente.

<u>Autre méthode</u> $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, $C^5 = C^4 . C = C$

Et on montre facilement que
$$C^{4k} = I_2$$
$$C^{4k+1} = C$$
$$C^{4k+2} = C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C^{4k+3} = C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $C^p \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

donc C est orthogonale.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $${}^tD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq D.$$ donc D non symétrique.

- $$\det D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$ (car triangulaire supérieure, det est le produit des éléments de la diagonale)

D n'est pas inversible.

- $$P_D(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3$$ (triangulaire supérieure)

donc 0 est l'unique valeur propre

On a $\det(M - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - M)$

car $\det(\lambda M) = \lambda^n \det M$

$\lambda \in \mathbb{C}$.

polynôme caractéristique dans cette fiche de TD

autre définition possible

Remarque

Si D était diagonalisable, alors D serait semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

donc $\exists P \in$ inversible, $D = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$

$$= 0$$

donc si D était diagonalisable, alors D serait nulle.

Contradiction avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc D non diagonalisable.

<u>Rappel</u> : Si M est diagonalisable, alors M est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont les valeurs propres de M.

- <u>Autre méthode</u> : Etudier le sous espace propre associé à la valeur propre 0, et montrer que le sous espace est de dimension < 3.

$$E_\lambda = \ker(M - \lambda I_n).$$

- $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc D nilpotente.

<u>Autre méthode</u> : $P_D(x) = -x^3$

et $P_D(D) = 0$ par Cayley-Hamilton.

<u>Rq</u> : Toute matrice triangulaire supérieure avec des 0 dans la diagonale est nilpotente.

$$\cdot \; {}^tDD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{\text{pas besoin de calculer les autres éléments de matrice.}} \neq I_3$$

${}^tDD \neq I_3$ donc D n'est pas orthogonale.

Exo 1

$\left(\begin{array}{l}\text{La somme} \\ \text{Le produit}\end{array}\right)$ de deux matrices ——— est

toujours ———

——— $=$ $\left\{\begin{array}{l}\text{symétriques} \\ \text{inversibles} \\ \text{diago} \\ \text{nilpotentes} \\ \text{orthogonale}\end{array}\right.$

- Soit A et B symétriques, ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$

(*) $${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$
$$= A + B$$

Vrai

donc $A+B$ symétrique.

(*) $${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$
$$= B.A$$
$$\neq A.B \text{ en général}$$ (les matrices A et B ne commutent pas en général)

Faux

- Soit A inversible

(*) Contrexemple : On pose $B = -A$, alors $\det B = (-1)^n \det A$
$\neq 0$

donc B est bien inversible.

et $A+B = A-A = 0$ qui n'est pas inversible.

Faux

⊛ Soit A et B inversibles. Alors $\det A \neq 0$
et $\det B \neq 0$

et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\neq 0$

donc AB inversible

Vrai

- Diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 1/2 & -x \end{vmatrix} = x(x-1)$ scindé à racines simples $\Rightarrow$ diagonalisable

$P_B(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1/2 & 1-x \end{vmatrix} = x(x-1)$ idem $\Rightarrow$ diagonalisable

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

En effet $P_{A+B} = \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$

donc 1 racine double.

$E_1 = \ker(A+B-I_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)X = X$$
$$(A+B-I_2)X = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 + x_2 = x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = 0$

donc $E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

qui est une droite de dimension $1 < 2$
donc

donc $A+B$ pas diagonalisable.

Faux

(*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pas diagonalisable, car $P_{BA}(x) = x^2$, 0 seule valeur propre

et si BA était diagonalisable, alors BA serait semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ce qui est impossible.

donc B.A non diagonalisable.

Faux

- Nilpotentes

(*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = B^2 = 0$

$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

et $(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B)$
$= A+B$
etc.

donc $A+B$ n'est pas nilpotente.

Faux

(*) $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $(BA)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc BA non nilpotent.

Faux

• Matrices orthogonales.

(*) I_n est orthogonal, ${}^tI_n I_n = I_n \cdot I_n = I_n$

$I_n + I_n = 2I_n$

et ${}^t(2I_n)(2I_n) = 4I_n \neq I_n$

donc $I_n + I_n$ pas orthogonal. Faux

(*) Soit A, B orthogonales, alors $\begin{cases} {}^tAA = I_n \\ {}^tBB = I_n \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
{}^t(AB)AB &= {}^tB \underbrace{{}^tA A}_{I_n} B \\
&= {}^tBB \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

donc AB est bien orthogonale. Vrai

$\boxed{\text{Exo 3}}$ Soit $\mathcal{L}^n$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Montrer $\mathcal{L}^n$ stable par le produit de matrices.

1) Si $A \in \mathcal{L}^n$, alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & (0) \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Alors $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ "$a_{ij} = a_{\text{ligne, colonne}}$"

et $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Soit $A, B \in \mathcal{L}^n$

Posons $C = AB$. On veut montrer $C \in \mathcal{L}^n$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{cases} b_{kj} = 0 \text{ si } k < j & \text{car } B \in \mathcal{L}^n \\ a_{ik} = 0 \text{ si } i < k & \text{car } A \in \mathcal{L}^n \end{cases}$$

On veut montrer $c_{ij} = 0$ si $i < j$.

<u>Supposons $i < j$</u>

- Ou bien $k \geq j$, auquel cas $i < j \leq k$ ①
  donc $i < k$ donc $a_{ik} = 0$
- Ou bien $k < j$, et alors $b_{kj} = 0$ ②

donc dans tous les cas

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{pour ①}}}{a_{ik}} \underset{\substack{\parallel \\ 0 \text{ pour ②}}}{b_{kj}} = 0$$

donc $c_{ij} = 0$ $i < j$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{L}^n$?

C'est un résultat de cours, mais redémontrons le.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$ de taille $n\times n$

développons par rapport à la première ligne.

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots \\ a_{32} & \ddots & (0) \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ de taille $(n-1)\times(n-1)$.

$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ en développant successivement par rapport aux premières lignes

- On a bien

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

la seule permutation qui contribue est la permutation identité $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$

Pour toutes les autres, $\exists i_0,\ i_0 < \sigma(i_0)$ et $A_{i_0\sigma(i_0)} = 0$ et le produit est nul.

donc $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$

3) $$P_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & & & (0) \\ & a_{22}-x & & \\ & & \ddots & \\ (*) & & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - x)$$ d'après la question précédente.

donc les a_{ii} sont les valeurs propres.

4) A inversible ssi $\det A \neq 0$

Or $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

donc $\det A \neq 0$ ssi tous les $a_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

5) Montrer que si $A \in \mathcal{L}_n$ est inversible, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$ et les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les a_{ii}^{-1}.

5) Posons $B = A^{-1}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$
(avec $A \in \mathcal{L}_n$)

On sait que $AB = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

Regardons les éléments de matrice un par un.

(On cherche à déterminer B)

• Indice 1,1 de AB.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} = 1$$

A triangulaire inf, donc $a_{1k} = 0$ si $k > 1$

$\Rightarrow a_{11} b_{11} = 1$

$\Rightarrow b_{11} = \dfrac{1}{a_{11}}$ ($a_{11} \neq 0$ car A inversible, cf question 4)

- <u>Indice 1,2 de AB</u> :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k2} = 0$$

On a comme précédement $a_{1k} = 0$ si $k > 1$.

donc $a_{11} b_{12} = 0$

$\Rightarrow b_{12} = 0$ (car $a_{11} \neq 0$)

- <u>Indice 1, m de AB</u>, $m > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{km} = 0$$

donc $a_{11} b_{1m} = 0$

donc $b_{1m} = 0 \quad \forall m > 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & ? & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

par l'instant

- Indice 2,2

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k2} = 1$$

De même, $A \in \mathcal{L}_n$, $a_{2k} = 0$ si $k > 2$

$$a_{21} \underbrace{b_{12}}_{\substack{= 0 \\ \text{(voir plus haut)}}} + a_{22} b_{22} = 1$$

$$\Rightarrow a_{22} b_{22} = 1$$

donc $b_{22} = \dfrac{1}{a_{22}}$

- Indice $(2, m)$ $m > 2$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{km} = 0$$

$$\Rightarrow a_{21} \underbrace{b_{1m}}_{\substack{= 0 \\ \text{(voir plus haut)}}} + a_{22} b_{2m} = 0$$

$$\Rightarrow b_{2m} = 0 \quad (\text{car } a_{22} \neq 0)$$

On est arrivé à

$$B = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & & & 0 \\ ? & 1/a_{22} & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline & & & ? & & \end{pmatrix}$$

On montre, en calculant successivement des indices $3,n$ puis $4,n$, ---- puis n,n que

$$B = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & 1/a_{22} & & \vdots \\ ? & & \ddots & 0 \\ & & & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

donc ceci répond à la question.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_2 & 1 & (0) & \\ a_3 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & 0 & \cdots \ 0 & 1 \end{pmatrix}$$, Calculer A^{-1}

$A \in \mathcal{L}_n$. D'après le résultat précédent $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$

et en posant $B = A^{-1}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$b_{ii} = 1$.

On a $A = I_n + N$, avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ a_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement $N^2 = 0$.

On peut écrire aussi $A^{-1} = I_n + \underbrace{M}_{\text{triangulaire inférieure stricte}}$

$$A^{-1}A = I_n$$

donc $(I_n + M)(I_n + N) = I_n$

donc $I_n + N + M + MN = I_n$

donc $N + M + MN = 0$

(et on cherche M)

$M = -N$ marche, car $N + (-N) - N^2 = N - N = 0$

donc au final $A^{-1} = I_n - N$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ -a_2 & \ddots & & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ -a_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Exo 4}}$ $M = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Trouver $O \in O_2$ (matrice orthogonale), t.q

$M = O D {}^tO$, avec D diagonale.

<u>Rappel</u>: Toute matrice symétrique (hermitienne) est diagonalisable dans une base orthonormée.

- On cherche les valeurs propres

$$P_M(x) = \begin{vmatrix} 1+\alpha^2-x & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2-x \end{vmatrix}$$

$$= (1+\alpha^2-x)(1+\beta^2-x) - \alpha^2\beta^2$$

$$= 1+\beta^2 - x + \alpha^2 + \cancel{\alpha^2\beta^2} - \alpha^2 x - x - x\beta^2 + x^2 - \cancel{\alpha^2\beta^2}$$

$$= 1+\alpha^2+\beta^2 - x(1+\alpha^2+1+\beta^2) + x^2$$

$$= 1+\alpha^2+\beta^2 - x(2+\alpha^2+\beta^2) + x^2$$

<u>Méthode 1</u>: discriminant (second degré)

<u>Méthode 2</u>: $P_M(x) = 1+\alpha^2+\beta^2 - x(1+\alpha^2+\beta^2) - x + x^2$

$$= (1+\alpha^2+\beta^2)(1-x) + x(x-1)$$

$$= (x-1)(x-1-\alpha^2-\beta^2)$$

$$P_M(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou } x = 1+\alpha^2+\beta^2 \end{cases}$$

Méthode 3 : somme et produit des racines.

- vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1+\alpha^2)x_1 + \alpha\beta x_2 = x_1 \\ \alpha\beta x_1 + (1+\beta^2)x_2 = x_2 \end{cases}$$

(on suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. sinon la matrice est déjà diagonale !)

$$\begin{cases} \alpha^2 x_1 + \alpha\beta x_2 = 0 \\ \end{cases}$$

donc $x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} x_2$

$$E_1 = \text{vect}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

si on normalise ce vecteur propre, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

- vecteur propre pour la vp $1+\alpha^2+\beta^2$

$$\begin{cases} (1+\alpha^2)x_1 + \alpha\beta x_2 = (1+\alpha^2+\beta^2)x_1 \\ \alpha\beta x_1 + (1+\beta^2)x_2 = (1+\alpha^2+\beta^2)x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta^2 x_1 = \alpha\beta x_2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{\beta} x_2$

donc $E_{1+\alpha^2+\beta^2} = \text{vect}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

en normalisant, $v_{1+\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

On pose $O = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix}-\beta & \alpha\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$

$v_1 \qquad v_{1+\alpha^2+\beta^2}$

$${}^tOMO = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

$${}^tOMO = D \qquad \text{(diagonale)}$$

$$\underbrace{O\,{}^tO}_{I_2}\, M \underbrace{O\,{}^tO}_{I_2} = O D\, {}^tO$$

$$M = O D\, {}^tO$$

Rq: si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, M est déjà diagonale,
donc on peut choisir $O = I_2$

$M = M = O M\, {}^tO$ et M est diagonale.

$\boxed{\text{Exo 5}}$ u, v vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$.
On note $\underline{R} = uv^*$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$uv^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\overline{v_1} & \cdots & u_1\overline{v_n} \\ u_2\overline{v_1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ u_n\overline{v_1} & \cdots & u_n\overline{v_n} \end{pmatrix}$$

(bien une matrice)

$$u^*v = \begin{pmatrix} \overline{u_1} & \cdots & \overline{u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} \cdot v_i \in \mathbb{C}.$$

La première colonne est $\overline{v_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, la deuxième $\overline{v_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, ...

..., la nième $\overline{v_n} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

donc tous ces vecteurs sont proportionnels.

donc $\operatorname{rg} R \leq 1$.

Au moins un des vecteurs colonne est non nul, car $\begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0. \end{cases}$

donc $\operatorname{rg} R = 1$.

- Réciproquement, montrons que toute matrice de rang 1 peut s'écrire sous cette forme.

Soit une matrice A de rang 1. Alors, toutes les colonnes sont proportionnelles, et au moins une colonne C_{i_0} non nulle.

$$A = (C_1, \dots, C_{i_0}, \dots, C_n)$$

Posons $u = C_{i_0}$. Alors

$$A = (v_1 u, v_2 u, \dots, u, \dots, v_n u)$$

par $\begin{cases} v_i \in \mathbb{C} & \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\} \\ v_{i_0} = 1. \end{cases}$

Si l'on pose $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, et $v = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$, alors

pas oublier de les mettre

$$A = uv^*$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

2) Montrer que les valeurs propres de R sont 0 et $\langle u | v \rangle$ $(= u^* v)$ cf cours.

$$R = uv^*$$

$$
\begin{aligned}
Ru &= u v^* u \\
&= u (v^* u) \\
&= u \underbrace{\langle v | u \rangle}_{\text{scalaire}} \qquad \text{(par définition du produit scalaire)} \\
&= \langle v | u \rangle u \\
&= \overline{\langle u | v \rangle}\, u
\end{aligned}
$$

(L'énoncé n'a pas les même conventions pour le produit scalaire, c'est à dire $\langle u | v \rangle_{\text{énoncé}} = v^* u$

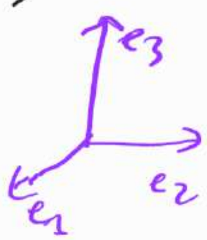
donc u est vecteur propre pour la valeur propre $\overline{\langle u | v \rangle}$

- Soit x un vecteur. Alors

$$
\begin{aligned}
Rx &= u v^* x \\
&= u \langle v | x \rangle
\end{aligned}
$$

Tout vecteur x orthogonal à v est vecteur propre pour la valeur propre 0, car $\langle v | x \rangle = 0$

(Par exemple dans $\mathbb{R}^3$



Prenons $v = e_1$, alors $v^\perp = \text{vect}(e_2, e_3)$)

Dans $\mathbb{C}^n$, l'orthogonal de v, noté $v^\perp$ est de dimension $(n-1)$ donc on peut trouver $(n-1)$ vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 0

On a donc : • u vecteur propre pour la valeur propre $\overline{\langle u/v \rangle}$

• $n-1$ vecteurs propres (dans $v^\perp$) associés à la valeur propre 0.

Ce sont les seuls possibles, car si w vecteur propre alors

$$Rw = uv^* w = \langle v/w \rangle u = \lambda w$$

et ainsi $\langle v/w \rangle = 0$ ou w colinéaire à u.

3) Montrer que u diagonalisable ssi $\langle u/v \rangle \neq 0$.

($\Leftarrow$) : Supposons que $\langle u/v \rangle \neq 0$.

Rappel : Si l'on arrive à trouver une base de vecteurs propres pour R, alors R est diagonalisable.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $v^\perp$. $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{n-1})$ comporte $n-1$ éléments.

On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, u)$

cette famille est libre car $\langle u/v \rangle \neq 0$

Elle comporte n éléments donc c'est une base.

$$n = \dim \mathbb{C}^n$$

$\mathcal{B}$ est ainsi une base de vecteurs propres de R, donc R est diagonalisable.

($\Rightarrow$) Montrons R non diagonalisable si $\langle u/v \rangle = 0$.

R a toutes ses valeurs propres nulles.

Supposons R diagonalisable. Alors R semblable à la matrice nulle, donc $R = 0$.

contredit le fait que R est de rang 1.

donc R non diagonalisable.

$\boxed{\text{Exo 6}}$ Chercher

$\boxed{\text{Exo 7}}$ n nombres complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

la matrice compagnon du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$

Montrer $P_A(x) = (-1)^n P(X)$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & & (0) & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & (0) & \ddots & -x & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -x-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On pose $P_A(x) = Q_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ; x)$

On dvp par rapport à la première ligne
(première colonne marche aussi)

$$Q_n(a_0,\dots,a_{n-1};x) = -x \underbrace{\begin{vmatrix} -x & & & & -a_1 \\ 1 & -x & & & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -x & \vdots \\ & & & 1 & -x-a_{n-1} \end{vmatrix}}_{Q_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1};x)}$$

$$+ (-1)^{n+1}(-a_0) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure, de déterminant } 1.}$$

$$\underbrace{Q_n(a_0,\dots,a_{n-1};x)}_{\text{det de taille } n} = (-1)^n a_0 - x \underbrace{Q_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1};x)}_{\text{det de taille } n-1}$$

$$Q_n(a_0,\dots,a_{n-1};x) = (-1)^n a_0 - x\left[(-1)^{n-1} a_1 - x\, Q_{n-2}(a_2,\dots,a_{n-1};x)\right]$$

$$= (-1)^n a_0 + (-1)^n a_1 x + x^2 Q_{n-2}(a_2,\dots,a_{n-1};x)$$

On itère ce raisonnement

$$Q_n(a_0,\dots,a_{n-1};x) = (-1)^n a_0 + (-1)^n a_1 x + (-1)^n a_2 x^2$$
$$+ \cdots + (-1)^n a_{n-2} x^{n-2} + (-1)^{n-1} x^{n-1} Q_1(a_{n-1};x)$$

Et $Q_1(a_{n-1},x) = -x - a_{n-1}$

Au final $Q_n(a_0, \dots, a_{n-1}; x) = (-1)^n \left[a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}\right]$

<u>Plus proprement</u>: Récurrence.

- $Q_1(a_{n-1}; x) = -(x + a_{n-1})$ donc vrai pour $n = 1$
- On utilise la relation de récurrence.

$$Q_n(a_0, \dots, a_{n-1}; x) = +(-1)^n a_0 - x Q_n(a_1, \dots, a_{n-1}; x)$$

<u>Rem</u>: Si l'on définit le polynôme caractéristique comme

$$\tilde{P}_A(x) = \det(x I_n - A)$$

Alors $\tilde{P}_A(x) = P(X)$.

$\boxed{\text{Exo 8}}$ Soit x et y deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{C}^n$. On considère la matrice $A = x y^* + y x^*$

1) Montrer A hermitienne, de rang 2. Déterminer son image.

1) <u>Rappel</u> A hermitienne si $A^* = A$.

$$\begin{aligned} A^* &= (x y^* + y x^*)^* \\ &= (x y^*)^* + (y x^*)^* \\ &= (y^*)^* x^* + (x^*)^* y^* \\ &= y x^* + x y^* \end{aligned}$$

$= xy^* + yx^*$

$= A$ donc A hermitienne.

Soit u un vecteur de $\mathbb{C}^n$.

$$Au = (xy^* + yx^*)u$$
$$= xy^*u + yx^*u$$
$$= x\langle y|u\rangle + y\langle x|u\rangle$$
$$= \langle y|u\rangle x + \langle x|u\rangle y$$

donc $Au \in \mathrm{vect}(x,y)$ de dimension 2 car x, y linéairement indépendants.

donc $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{vect}(x,y)$.

- Montrons $\mathrm{vect}(x,y) \subset \mathrm{Im}\, A$.

Soit $z \in \mathrm{vect}(x,y)$. Alors $z = \lambda x + \mu y$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

On cherche u t.q. $Au = \langle y|u\rangle x + \langle x|u\rangle y$
$$= \lambda x + \mu y.$$

On choisit $u = \alpha x + \beta y$

$$Au = \langle y|\alpha x + \beta y\rangle x + \langle x|\alpha x + \beta y\rangle y$$
$$= \left(\alpha\langle y|x\rangle + \beta\langle y|y\rangle\right)x + \alpha\left(\langle x|x\rangle + \beta\langle x|y\rangle\right)y$$

On veut trouver α et β, t.q $Au = \lambda x + \mu y$

$$\begin{cases} \alpha \langle y|x\rangle + \beta \|y\|^2 = \lambda \\ \alpha \|x\|^2 + \beta \langle x|y\rangle = \mu \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \|x\|^2 & \langle x|y\rangle \\ \langle y|x\rangle & \|y\|^2 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det B = \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x|y\rangle|^2$$

x et y sont linéairement indépendants, donc d'après Cauchy-Schwarz $\left(|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \text{ avec égalité ssi } x, y \text{ colinéaires} \right)$

$\det B \neq 0$

donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$.

donc au final $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

$u = \alpha x + \beta y$ satisfait $Au = \lambda x + \mu y$

donc $\operatorname{vect}(x, y) \subset \operatorname{Im} A$

donc $\operatorname{vect}(x, y) = \operatorname{Im} A$.

x et y linéairement indépendants donc $\dim \operatorname{vect}(x, y) = 2$

donc $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A = 2$.

2) $A = xy^* + yx^*$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

D'après la question 1, $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{vect}(x, y)$

Soit u un vecteur propre de A.

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $u = \alpha x + \beta y$

$Au = \lambda u$, λ valeur propre.

$$(xy^* + yx^*)(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

$$\Leftrightarrow xy^*\alpha x + xy^*\beta y + yx^*\alpha x + yx^*\beta y - \lambda\alpha x - \lambda\beta y = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha x \boxed{y^* x} + \beta x \boxed{y^* y} + \alpha y \boxed{x^* x} + \beta y \boxed{x^* y} - \lambda\alpha x - \lambda\beta y = 0$$

scalaires.

$$\Leftrightarrow x(\alpha y^* x + \beta y^* y - \lambda\alpha) + y(\alpha x^* x + \beta x^* y - \lambda\beta) = 0$$

x et y linéairement indépendants

$$\begin{cases} \alpha y^* x + \beta \|y\|^2 - \alpha\lambda = 0 \\ \alpha \|x\|^2 + \beta x^* y - \beta\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \langle x|y\rangle + \beta\|y\|^2 - \alpha\lambda = 0 \\ \alpha\|x\|^2 + \beta\overline{\langle x|y\rangle} - \beta\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \langle x|y\rangle - \lambda & \|y\|^2 \\ \|x\|^2 & \overline{\langle x|y\rangle} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

On veut $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dans le noyau de $B = \begin{pmatrix} \langle x|y\rangle - \lambda & \|y\|^2 \\ \|x\|^2 & \overline{\langle x|y\rangle} - \lambda \end{pmatrix}$

ceci implique B non inversible, soit $\det B = 0$.

$$(\langle x|y\rangle - \lambda)(\overline{\langle x|y\rangle} - \lambda) - \|x\|^2\|y\|^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda\left(\langle x|y\rangle + \overline{\langle x|y\rangle}\right) + \langle x|y\rangle\overline{\langle x|y\rangle} - \|x\|^2\|y\|^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle x|y\rangle + |\langle x|y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 = 0$$

Equation du second degré en λ.

$$\Delta = 4(\operatorname{Re}\langle x|y\rangle)^2 - 4\left(|\langle x|y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2\right)$$

$$= 4\Big(\underbrace{(\operatorname{Re}\langle x|y\rangle)^2}_{\geq 0} \underbrace{- |\langle x|y\rangle|^2 + \|x\|^2\|y\|^2}_{> 0 \text{ par Cauchy-Schwarz}}\Big)$$

$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$
avec égalité ssi x et y colinéaires (liés) ce qui n'est pas le cas ici.

Donc $\Delta > 0$

donc les valeurs propres λ_+ et λ_- sont distinctes et données

$$\boxed{\lambda_\pm = \operatorname{Re}\langle x|y\rangle \pm \sqrt{(\operatorname{Re}\langle x|y\rangle)^2 - |\langle x|y\rangle|^2 + \|x\|^2\|y\|^2}}$$

Pour trouver les vecteurs propres, on utilise (*)

$$\left(\langle x,y\rangle - \lambda_\pm\right)\alpha_\pm + \|y\|^2\beta_\pm = 0$$

et on trouve la relation entre $\begin{cases} \alpha_+ \text{ et } \beta_+ \\ \alpha_- \text{ et } \beta_- . \end{cases}$