Feuille TD 2

décomposition en valeurs singulières = SVD.

Rappel : Soit A une matrice $m \times n$. Une SVD de A est donnée par

$$\underbrace{A}_{\substack{m\times n\\ \text{quelconque}}} = \underbrace{V}_{\substack{m\times m\\ \text{unitaire}}} \; \underbrace{D}_{\substack{m\times n\\ \text{"diagonale"}}} \; \underbrace{U^*}_{\substack{n\times n\\ \text{unitaire}}}$$

Exo 0

1) svd pour I_n.

$$I_n = \underbrace{I_n}_{\text{unitaire}} \cdot \underbrace{I_n}_{\text{diagonale}} \cdot \underbrace{I_n}_{\text{unitaire}}$$

(ou bien $I_n = V I_n V^*$ pour toute matrice V unitaire)

2) Soit O une matrice orthogonale ($O^T O = I_n$)

$$O = O \cdot I_n \cdot I_n$$

ou bien $O = I_n \cdot I_n \cdot O$

3) Soit D une matrice diagonale

$$D = \underbrace{I_n}_{\text{unitaire}} \cdot \underbrace{D}_{\text{diagonale}} \cdot \underbrace{I_n}_{\text{unitaire}}$$

4) Soit $\underbrace{A}_{\text{une matrice } n\times n}$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & (0) \\ & \ddots & x_2 & \\ & & \ddots & x_{n-1} \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$

On pose $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & & & (0) \\ 0 & x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ (0) & & & x_{n-1} & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & x_{n-1} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & x_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Marche pour tout choix de $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

On choisit $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$

On pose $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

O est orthogonale car (arguments au choix)

- $O^T O = I_n$
- O est la matrice de l'application linéaire u qui permute cycliquement les éléments de la base.
  $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, ..., $u(e_{n-1}) = e_n$, $u(e_n) = e_1$

qui préserve le produit scalaire.

Au final $A = D \cdot O$

$$= \underset{\text{ortho}}{I_n} \cdot \underset{\text{diagonale}}{D} \cdot \underset{\text{ortho}}{O}$$

Rq:

si O est orthogonale alors

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ O = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \end{array}$$

et les vecteurs colonnes v_i sont orthogonaux entre eux et orthonormés

5) A matrice $m \times n$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{matrix}$$

$\longleftarrow n \longrightarrow$

les a_i sont réels.

On calcule $A^T A$:

$$\underset{n\times m}{A^T}\,\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & & a_n^2 \end{pmatrix} \\ \quad v_1 \quad\;\; v_2 \qquad\quad v_n \end{array}$$

$$v_1 = a_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$v_2 = a_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$v_n = a_n \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

C'est exactement la matrice étudiée à l'exercice 5 du TD 1, avec $u = v^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Autrement dit $A^T A = u\,u^T$, qui est de rang 1.

On avait montré que les valeurs propres étaient

- $\langle u | v \rangle = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ de multiplicité 1.

  vecteur propre correspondant $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

• 0 avec multiplicité $n-1$.

Sous-espace propre $u^\perp$ (qui est bien de dimension $n-1$)

On pose $V = \left(\frac{u}{\|u\|} \; w_1 \; w_2 \; \cdots \; w_{n-1} \right)$ orthogonale

avec $w_1, \ldots, w_{n-1}$ une base orthonormée de $u^\perp$.

$$V^T A^T A V = \begin{pmatrix} \|u\|^2 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{A} \, \underset{n \times n}{V}$$

<u>Calculons AV :</u>

$$AV = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|u\|} & w_1^{(1)} & \cdots & w_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n}{\|u\|} & w_1^{(n)} & \cdots & w_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\|u\|^2}{\|u\|} & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } w_i \in u^\perp \; \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

$$= \begin{pmatrix} \|u\| & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = D$$

(matrice $m \times n$)

Au final, en posant D la matrice ci-dessous.

$$AV = D \Rightarrow AVV^T = DV^T$$
$$\Rightarrow A = I_m D V^T$$

qui est bien une décomposition en val. singulières.

6) Soit A une matrice carrée inversible dont la svd

$$A = \underset{\substack{\uparrow \\ n\times n}}{V}\ \underset{\substack{\uparrow \\ n\times n}}{D}\ \underset{\substack{\uparrow \\ n\times n}}{U^*}$$

D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs singulières de A, c'est à dire les racines des valeurs propre de A^*A.

Comme A est inversible $\det A \neq 0$ et donc

$\det(A^*A) \neq 0$ donc toutes les valeurs propres de A^*A sont strictement positive.

$$D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_i > 0$$

donc D inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\gamma_n \end{pmatrix}$

V et U sont inversibles car elles unitaires

donc $A^{-1} = (VDU^*)^{-1}$

$= (U^*)^{-1} D^{-1} V^{-1}$

$$\boxed{A^{-1} = U D^{-1} V^*}$$

$\boxed{\text{Exo 1}}$ Chercher chez vous.

$\boxed{\text{Exo 2}}$

1) $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}$

On cherche $\underset{2\times 3}{A} = \underset{2\times 2}{P} \cdot \underset{2\times 3}{D} \cdot \underset{3\times 3}{Q^T}$

• Méthode 1 : On diagonalise la "grande matrice" $A^T.A$ qui est 3×3.
(plus calculatoire)

$$A^T.A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ -12 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$= \text{......}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 9 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{A^TA}(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 9-x & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (9-x) \begin{vmatrix} 3-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (9-x)\left[(3-x)(1-x) - 3\right]$$

$$= (9-x)\left[3 - 3x - x + x^2 - 3\right]$$

$$= (9-x)(x^2 - 4x)$$

$$= x(9-x)(x-4)$$

donc les vp de A^TA sont $9, 4, 0$.

On cherche les vecteurs propres (faire les calculs), et on trouve la matrice de passage :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

vp 9 vp 4 vp 0

On a donc $Q^T(A^TA)Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (I)

On cherche à écrire $A = P.D.Q^T \iff P^TAQ = D$

multiplier par P^T à gauche et Q à droite

donc on est pas loin

Calculons $AQ = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$= \dots\dots$

$$AQ = \begin{pmatrix} -12/5 & 6/5 & 0 \\ 9/5 & 8/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AQ)^T = Q^T A^T = \begin{pmatrix} -12/5 & 9/5 \\ 6/5 & 8/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on peut réécrire (I) comme

$$\underbrace{Q^T A^T}\, A\, Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12/5 & 9/5 \\ 6/5 & 8/5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} A\, Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

En "effaçant la dernière ligne (on a le droit) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -12/5 & 9/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{A}_{2\times 3}\, \underbrace{Q}_{3\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

Ce sont les carrés des valeurs singulières.

On divise la première ligne par $\sqrt{9}=3$, et on divise la deuxième par $\sqrt{4}=2$.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}}_{P^T} A\,Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$3^2+4^2=5^2$

On vérifie $P^TP = I_2$ donc P^T est orthogonale.

(Si on ne trouve pas que la matrice 2×2 à gauche est orthogonale, c'est que l'on a fait une erreur de calcul avant)

Au final $P^T A\,Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \underset{\substack{2\times 2 \\ \text{ortho}}}{P} \underset{\substack{2\times 3 \\ \text{"diagonale"}}}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \underset{\substack{3\times 3 \\ \text{ortho}}}{Q}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

<u>Algorithme</u> : * diagonaliser A^TA, trouver la matrice de passage Q t.q $Q^TA^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

avec les λ_i les vp de A^TA.

* Calculer AQ pour en déduire $Q^TA^T = (AQ)^T$

* Effacer des lignes si nécessaire, et diviser la ligne i par $\sqrt{\lambda_i}$

Méthode 2 (préférable)

On diagonalise la "petite" matrice

$$AA^T = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ -12 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}$$

$$P_{AA^T}(x) = \begin{vmatrix} \frac{36}{5} - x & -12/5 \\ -12/5 & \frac{29}{5} - x \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{36}{5} - x\right)\left(\frac{29}{5} - x\right) - \frac{144}{25}$$

$$= \frac{1044}{25} - \frac{36+29}{5}x + x^2 - \frac{144}{25}$$

$$= x^2 + \frac{900}{25} - \frac{65}{5}x$$

$$= x^2 - 13x + \frac{900}{100}\times 4$$

$$= x^2 - 13x + 36$$

$$= (x-4)(x-9)$$

$$\left(\begin{aligned} 36\times 29 &\\ &\parallel \\ 36\times 30 - 36 &\\ &\parallel \\ 360\times 3 - 36 &\\ 1080 - 36 &\\ 1044 & \end{aligned}\right.$$

$$\left(\begin{aligned} &4^2 - 13\times 4 + 36 \\ &\parallel \\ &16 - 52 + 36 = 0 \end{aligned}\right)$$

$$\left(\begin{aligned} &9^2 - 13\times 9 + 36 \\ &\parallel \\ &81 - 117 + 36 \\ &\parallel \\ &111 + 6 - 117 = 0 \end{aligned}\right)$$

donc les valeurs propres sont

4 et 9.

On trouve les vecteurs propres

$$AA^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$36\alpha - 12\beta = 20\alpha$$

$$\Rightarrow 16\alpha = 12\beta$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 3\beta$$

donc $E_4 = \text{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{v_1}\right)$ $(3^2+4^2=5^2)$

on normalise le vecteur propre $v_4 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

<u>De même pour la valeur propre 9.</u>

$$36\alpha - 12\beta = 45\alpha$$

$$\Rightarrow 12\beta = -9\alpha$$

$$\Rightarrow 3\alpha = -4\beta$$

donc $E_9 = \text{vect}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

on normalise $v_9 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

On pose $U = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$, U est unitaire (orthogonale)

D'où (II) $U^T A \boxed{A^T U} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ mettre les vp par ordre décroissant.

bien

$$U^T A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Carrés des valeurs singulières

donc (II) se réécrit $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} A^T U = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On divise par $\sqrt{9} = 3$ la première ligne et par $\sqrt{4} = 2$ la deuxième ligne.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\text{on voudrait } 3\times 3} \underset{3\times 2}{A^T} \underset{2\times 2}{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{on voudrait } 3\times 2}$$

les valeurs singulières

On voudrait rajouter une ligne, de sorte que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} A^T U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est possible si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont choisis t.q

$$V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$ est orthogonale.

Le choix $\alpha_1 = 1/2$
$\alpha_2 = 0$
$\alpha_3 = -\sqrt{3}/2$

donne $V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ qui est bien orthogonale

[car les vecteurs colonnes sont orthogonaux entre eux.
et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

<u>Au final</u> : $V^T A^T U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^T = V \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$$

qui est bien la svd de A^T car $\begin{cases} V \text{ orthogonale } 3\times 3 \\ U \text{ orthogonale } 2\times 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

$$= \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

A comparer avec la méthode précédente qui donne

$$A = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

qui est presque pareil

Mais si on avait choisi $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \sqrt{3}/2$ le résultat aurait été identique.

Donc les deux méthodes sont compatibles !

Exo chez vous : Faites svd de

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -3/2 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta & \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi]$$

Application à la compression d'images

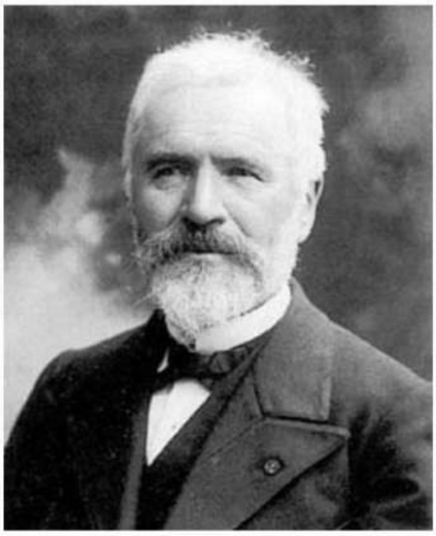
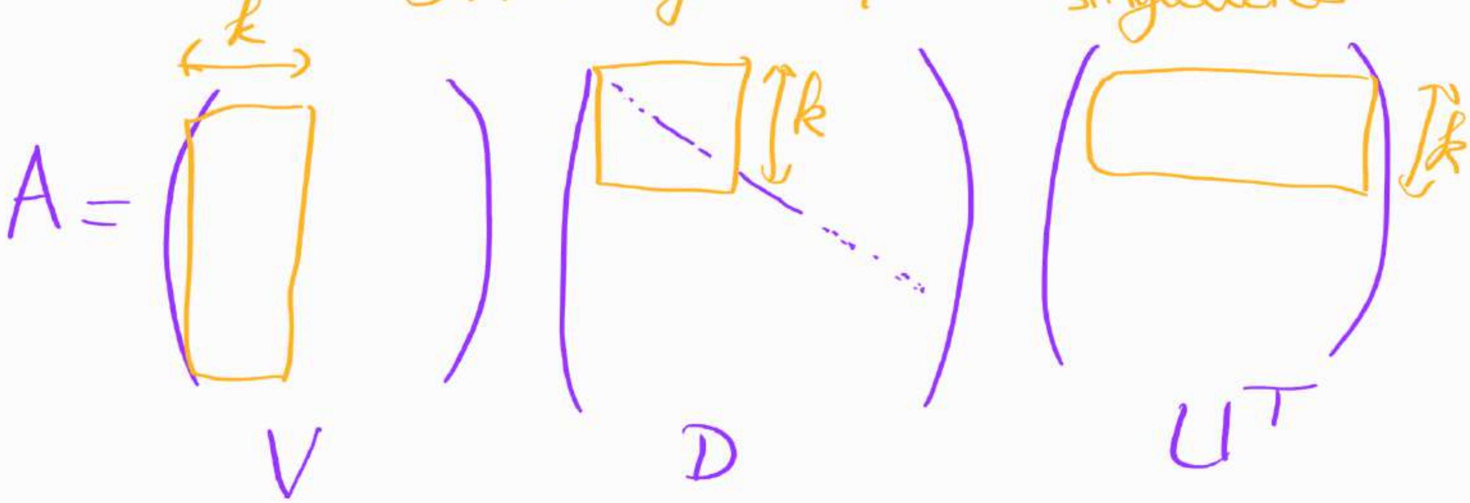


Image de Camille Jordan

Matrice A, 326×266

On ne garde que k valeurs singulières



$(k=5)$ $(k=10)$ $(k=20)$ $(k=40)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(en diagonalisant la petite matrice ${}^tBB$.)

$\boxed{\text{Exo2}}$

2) donner svd de

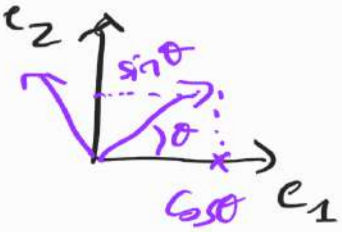
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (je change la matrice)

1) On pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

ex

$$R(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



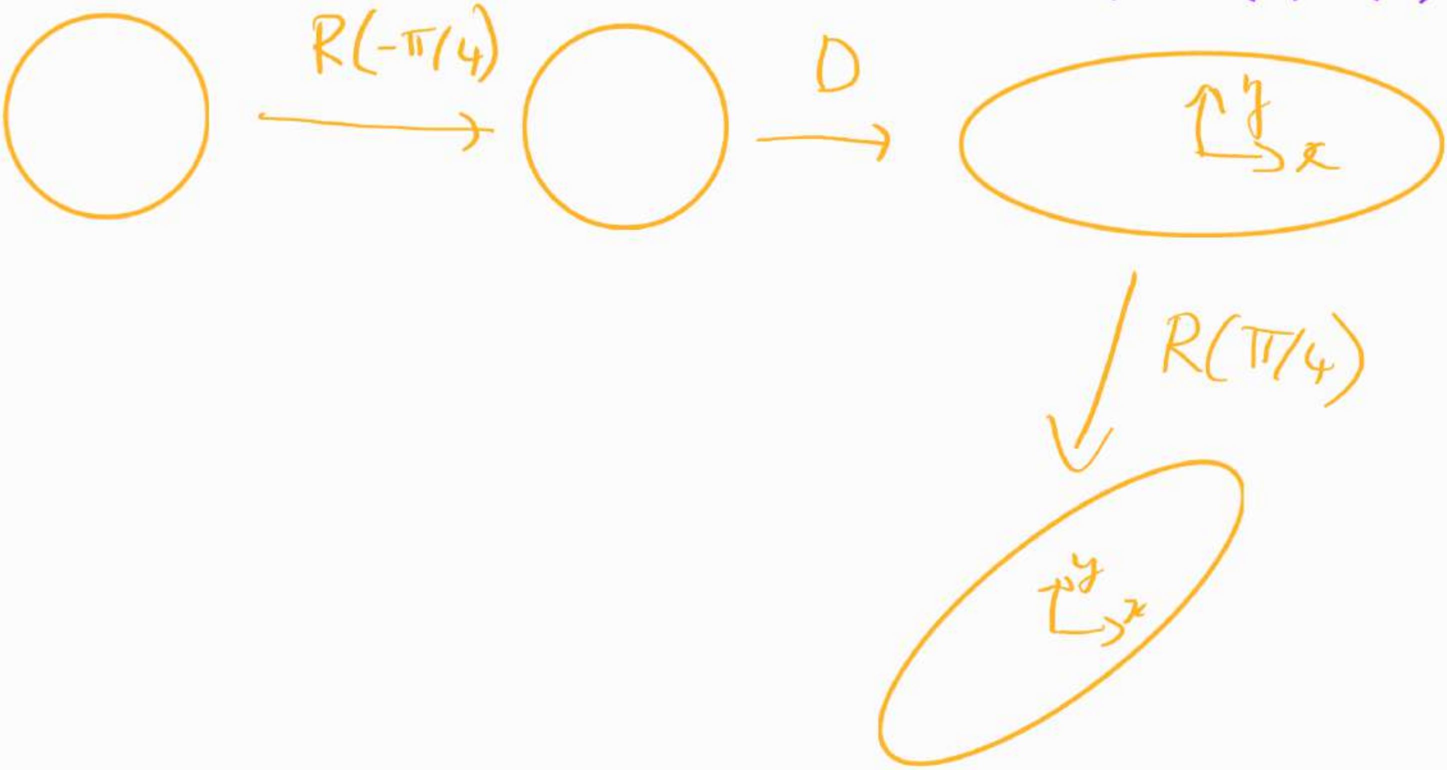
En faisant svd sur la matrice A (faites chez vous)

$$A = \underbrace{R(\pi/4)}_{\substack{\text{unitaire}\\ 2\times 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{diagonale}} \cdot \underbrace{R(-\pi/4)}_{\text{unitaire } 2\times 2.} \qquad (*)$$

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = D$$

Image du cercle unité par l'appl linéaire associée à A?

$D\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



ellipse tournée de 45°.

Rq : svd sur des matrices carrées : on peut utiliser la méthode explicitée ci-dessus, mais c'est plus simple car il n'y a pas besoin d'ajouter / retirer des lignes / colonnes.

$\boxed{\text{Exo 3}}$ Norme de Frobenius. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

1) Montrer $\|\cdot\|_F$ est une norme matricielle et $\|A\|_F^2 = Tr(A^*A)$

Norme matricielle

Il faut
- $|||A||| = 0 \Rightarrow A = 0$ (séparation)
- $|||\lambda A||| = |\lambda|\, |||A|||$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. (homogénéité)
- $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$ (inégalité triangulaire)

(positif car prendre $B = -A$ dans l'inégalité triangulaire)

- $|||A|||_F = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} |A_{ij}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow A_{ij} = 0 \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

- $|||\lambda A|||_F = \left(\sum_{i,j} |\lambda A_{ij}|^2\right)^{1/2}$

$$= \left(|\lambda|^2 \sum_{i,j} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| \left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| \, |||A|||_F$$

- On veut montrer $|||A+B|||_F \leq |||A|||_F + |||B|||_F$

Montrons $|||A+B|||_F^2 \leq \left(|||A|||_F + |||B|||_F \right)^2$

$$|||A+B|||_F^2 = \sum_{i,j} |A_{ij} + B_{ij}|^2 \quad \left(|z|^2 = z\bar{z} \right)$$

$$= \sum_{i,j} (A_{ij} + B_{ij}) \overline{(A_{ij} + B_{ij})}$$

$$= \sum_{i,j} |A_{ij}|^2 + |B_{ij}|^2 + \underbrace{A_{ij}\overline{B_{ij}} + B_{ij}\overline{A_{ij}}}_{2\,\mathrm{Re}(\overline{A_{ij}} B_{ij})}.$$

Posons x le vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ avec composantes A_{ij}

—— y ———————————————— B_{ij}

$$\text{Alors } |||A+B|||_F^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \left(\langle x|y \rangle + \overline{\langle x|y \rangle} \right)$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leq \left(\|x\| + \|y\| \right)^2$$

et $(\|x\| + \|y\|)^2 = \left(|||A|||_F + |||B|||_F \right)^2$

donc on a bien une norme.

$*$ Montrons $|||A|||_F^2 = \mathrm{Tr}(A^*A)$

A^* a pour éléments de matrice $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$

donc $(A^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^*)_{ik} A_{kj}$

$$(A^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{ki}} A_{kj} \qquad (1)$$

$$\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} (A^*A)_{ii}$$

$$\underset{\substack{\text{en utilisant} \\ (1)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{ki}} A_{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |A_{ki}|^2$$

$$= |||A|||_F^2$$

(les indices sont muets et $\sum_i \sum_k = \sum_k \sum_i$)

2) Montrer que $|||\cdot|||_F$ n'est pas subordonnée.

<u>Rappel</u> : Norme subordonnée $|||\cdot|||_*$ à $\|\cdot\|_*$

$$|||A|||_* = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$$

Si l'on prend $A = I_n$, $|||I_n|||_* = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|I_n x\|}{\|x\|}$

$$= 1.$$

D'après la question précédente

$$|||I_n|||_F = \left(\operatorname{Tr} I_n^* I_n\right)^{1/2}$$

$$= \left(\operatorname{Tr} I_n\right)^{1/2}$$

$$= n^{1/2}$$

$$= \sqrt{n} \neq 1 \text{ si } n > 1$$

(que l'on a implicitement supposé)

donc $|||\cdot|||_F$ n'est pas subordonnée.

3) Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaire $(U^* U = I_n)$

Montrer $|||UA|||_F = |||AU|||_F = |||A|||_F$

$$|||UA|||_F^2 = Tr\left((UA)^* UA\right)$$
$$= Tr\left(A^* \underbrace{U^* U}_{I_n} A\right)$$
$$= Tr\left(A^* A\right)$$
$$= |||A|||_F^2$$

De même $|||AU|||_F^2 = Tr\left((AU)^* AU\right)$
$$= Tr\left(U^* A^* A U\right)$$
$$= Tr\left(A^* A U U^*\right)$$ par cyclicité de la trace.
$$= Tr\left(A^* A\right)$$
$$= |||A|||_F^2$$

<u>Rq</u>: $Tr(AB) = Tr(BA)$
et $Tr(ABC) = Tr(BCA)$
mais $Tr(ABC) \neq Tr(CBA)$ en général.

4) Montrer que si A normale de valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $|||A|||_F = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right)^{1/2}$

4) Rappel : Une matrice A est normale si $A^*A = AA^*$

Une caractérisation : A est normale ssi elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

A est normale donc $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaire,

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D.$$

$$|||U^*AU|||_F = |||A|||_F \quad \text{(question 3)}$$

donc $|||A|||_F = \left(\mathrm{Tr}\,(D^*D)\right)^{1/2}$

$$D^*D = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

et donc $\mathrm{Tr}\,(D^*D) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$

$$|||A|||_F = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{1/2}.$$

$\boxed{\text{Exo 4}}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$|||A|||_1 = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \quad \text{et} \quad |||A|||_\infty = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Montrer $|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right)$ (question a)

et $|||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$ (question b)

a) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on note A_{ij} les éléments de matrice de A.

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij} x_j| \qquad \text{(ineg triang).}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \, |x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|}_{\leq \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right)$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right)$$

$$\|Ax\|_1 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right) \|x\|_1$$

donc $$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right)$$

donc $$|||A|||_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \right) \qquad (E1)$$

On cherche un vecteur x pour lequel

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|\right)$$

Soit $j_0 \in \{1,\dots,n\}$, l'indice (ou l'un des indices) tel que

$$\sum_{i=1}^{n}|A_{ij_0}| = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

et l'on note M ce maximum.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j\right|$$

On choisit $x = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow$ indice j_0. , $\|x\|_1 = 1$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|A_{ij_0}| = M$$

donc $\dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max\limits_{1\leq j\leq n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|A_{ij}|\right)$ (E2)

D'après (E1) et (E_2)

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|\right).$$

b) $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |(Ax)_i|$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1} |A_{ij}| |x_j|$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad |x_j| \leq \max_{1\leq j\leq n} |x_j| = \|x\|_\infty.$$

donc $\|Ax\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right) \times \|x\|_\infty$

donc $\dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$

donc $|||A|||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$ (F1)

Maintenant, cherchons un vecteur x pour lequel ce maximum est atteint.

Soit i_0 l'indice (ou un des indices) t.q

$$\sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}| = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right|$$

$$\|Ax\|_\infty \geqslant |(Ax)_{i_0}|$$

$$\geqslant \left| \sum_{j=1}^{n} A_{i_0 j} x_j \right| \quad \left(\text{souvent } \geqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}| \right)$$

On pose $\begin{cases} x_j = \dfrac{|A_{i_0 j}|}{A_{i_0 j}} & \text{si } A_{i_0 j} \neq 0 \\ x_j = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On obtient $\|Ax\|_\infty \geqslant \left| \sum_{j=1}^{n} A_{i_0 j} \dfrac{|A_{i_0 j}|}{A_{i_0 j}} \right|$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}|$$

On a aussi $\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \left| \dfrac{|A_{i_0 j}|}{A_{i_0 j}} \right|$

$$= \max_{1\leq j\leq n} (1)$$

$$= 1$$

(F2)

Au final $\dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}| = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$

D'après (F1) et (F2)

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$$

Rq : $|||A|||_\infty = |||A^T|||_1$.

$\boxed{\text{Exo 5}}$ Norme subordonnée à la norme 2.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$|||A|||_2 = \sup_{\substack{x\in \mathbb{C}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

1) Montrer que $\|Ux\|_2 = \|x\| = \|U^* x\|_2$ si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire.

1) Soit U une matrice unitaire ($U^*U = UU^* = I_n$)

et U_{ij} ses éléments de matrice.

- $$(U^*U)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (U^*)_{ik} U_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{U_{ki}} U_{kj}$$

$$= \delta_{ij} \qquad \left(\begin{array}{l} \delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{array} \right)$$

- $$\|Ux\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j \right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} \overline{u_{ij} x_j}\, u_{ij'} x_{j'}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} \overline{x_j}\, x_{j'} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{u_{ij}}\, u_{ij'}}_{\delta_{jj'}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}\, x_j$$

$$\|Ux\|_2^2 = \|x\|_2^2 .$$

Et de même $\|U^* x\|_2^2 = \|x\|_2^2$.

2) $$|||A|||_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$|||UA|||_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|U(Ax)\|_2}{\|x\|_2}$$

$$= \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$= |||A|||_2$$

de même pour $|||AU|||_2$ et $|||U^*AU|||_2$.

3) Soit A une matrice normale. Il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unitaire, telle que

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

(valeurs propres)

$$\|Ax\|_2^2 = \|U^*AUx\|_2^2 \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \|Dx\|_2^2$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right|^2$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |\lambda_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \rho(A)$$

rayon spectral.

$$\|Ax\|_2^2 \leq \rho(A)^2 \|x\|_2^2$$

$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq \rho(A)^2$$

et comme la norme et le rayon spectral sont positifs

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \rho(A) \qquad (G1)$$

$$|||A|||_2 \leq \rho(A)$$

On cherche un vecteur x t.q $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \rho(A)$

On pose i_0 l'indice (ou l'un des indices) tel que $|\lambda_{i_0}| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$

On choisit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i_0$, $\|x\|_2 = 1$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|U^* A U x\|_2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j x_j|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(|\lambda_{i_0}|^2\right)^{1/2}$$

$$= |\lambda_{i_0}| \qquad (G2)$$

D'après (G1) et (G2)

$$|||A|||_2 = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = \rho(A)$$

si A est normale.

4) Montrer que $|||A|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2}$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4) Ecrivons la svd de A :

$$A = V \cdot D \cdot U^*$$

A : $n \times n$; V : $n \times n$ unitaire ; D : diagonale $n \times n$. ; U^* : $n \times n$ unitaire.

$$|||A|||_2 = |||V D U^*|||_2$$

$$= |||D|||_2 \quad \text{car } U \text{ et } V \text{ unitaires.}$$

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$, les μ_i sont les valeurs singulières de A.

D est normale $\left(D^* D = D \cdot D^*\right)$

$$|||A|||_2 = \rho(D)$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i|$$

les μ_i sont les racines des valeurs propres de A^*A

Si l'on note λ_i les valeurs propres de A^*A,

$$|\lambda_i| = |\mu_i|^2$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i|\right)^2$$

Or $\rho(A^*A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$

Et A^*A est normale

donc $\sqrt{|||A^*A|||_2} = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} |\mu_i|^2}$

$$= \max_{1\leq i\leq n} |\mu_i|$$

$$= |||A|||_2$$

Au final $|||A|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2}$

$$= \sqrt{\rho(A^*A)}$$

5) On a $\rho(A^*A) = \rho(AA^*)$ car les vp non nulles de A^*A et AA^* coincident

Donc $|||A|||_2 = \rho(A^*A) = \rho(AA^*) = |||A^*|||_2$.

6) a) $0 < \mu_1(A) \leq \cdots\cdots \leq \mu_n(A)$ les valeurs singulières de A.

$|||A|||_2 = \sqrt{\max_i \mu_i^2(A)}$

$|||A|||_2 = \mu_n(A)$

$|||A^{-1}|||_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \left(\frac{1}{\mu_i^2(A)}\right)}$

$$= \frac{1}{\mu_1(A)}$$

donc $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.

b) A normale, donc $\exists U$ unitaire, $U^*AU = D$

$U^*A^{-1}U = D^{-1}$

$\rho(A) = \rho(D) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$

$\rho(A^{-1}) = \rho(D^{-1}) = \dfrac{1}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$ $\Rightarrow$ $\text{cond}_2 A = \dfrac{\max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$

$\boxed{\text{Exo 7}}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, $|||\cdot|||$ associée.

1) Montrer $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\| \geqslant \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$

1) $|||A^{-1}||| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}$

Soit $x \in \mathbb{K}^n$. On pose $y = Ax$

$$|||A^{-1}||| \geqslant \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|}$$

$$\geqslant \frac{\|A^{-1}Ax\|}{\|Ax\|}$$

$$\geqslant \frac{\|x\|}{\|Ax\|}$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \geqslant \frac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$$

2) Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||E||| < \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax + Ex\| \geqslant \left(\dfrac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\right)\|x\|$

2)

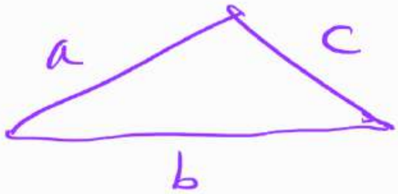
Rappel : inégalité triangulaire $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

inégalité triangulaire inversée :

$$(*) \quad \|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$$

(Conséquence de l'inégalité triangulaire)

Interprétation :
$\mathbb{R}^2$, norme $\|\cdot\|_2$



inég. triang : $b \leq a + c$

inég triang inversée : $c \geq |b-a|$.

On a bien sûr aussi $\|x+y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$.

On utilise cela sur $\|Ax+Ex\|$

$$\|Ax+Ex\| \geq \big| \|Ax\| - \|Ex\| \big|$$

- On a $\|Ex\| \leq |||E||| \, \|x\|$ (c'est à cela que servent les normes subordonnées).
  $\Rightarrow -\|Ex\| \geq -|||E||| \, \|x\|$.
- On a d'après la question 1)
  $$\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$$

$$\|Ax\| - \|Ex\| \geq \frac{\|x\|}{|||A^{-1}|||} - |||E||| \, \|x\|$$

$$\geq \left(\frac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E||| \right) \|x\| \geq 0$$

$$\left(\text{car } |||E||| < \frac{1}{|||A^{-1}|||} \right)$$

Ainsi, $\|Ax+Ex\| \geq \left(\frac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\right)\|x\|$ $(\square)$

Soit $x \in \ker(A+E)$. Alors $(A+E)x = 0$

et donc $\|(A+E)x\| = 0$

En utilisant $(\square)$, il vient $\underbrace{\left(\frac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\right)}_{>0}\|x\| \leq 0$ (hypothèse question 2)

$\Rightarrow \|x\| = 0$

$\Rightarrow x = 0$.

Donc $\ker(A+E) = \{0\}$ et $A+E$ est inversible.

3) Comment s'énonce le résultat si $A = I_n$?

$|||A||| = |||I_n||| = 1 = |||A^{-1}|||$ (car $\sup_{x \neq 0} \frac{\|I_n x\|}{\|x\|} = 1$)

Donc si $|||E||| < 1$, alors $\begin{cases} A+E \text{ est inversible} \\ A-E \text{ est inversible.} \end{cases}$

Analogue scalaire : $1+e$ est inversible si $|e| < 1$.
$e \in \mathbb{C}$.

(problème si $e = -1$)

$\boxed{\text{Exo 8}}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A inversible.

1) (a) $b \in \mathbb{K}^n$, $b \neq 0$, $\Delta b \in \mathbb{K}^n$.
$x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, $\Delta x \in \mathbb{K}^n$.

tels que $\begin{cases} Ax = b \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases}$ ← on voit cela comme une "perturbation" de $Ax = b$.

Montrer que $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\text{Cond } A) \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

avec $\text{Cond } A = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$

1 a) $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$

$\Rightarrow Ax + A\Delta x = b + \Delta b$

Or $Ax = b$, donc $A\Delta x = \Delta b$

A inversible, donc $\Delta x = (A^{-1})\Delta b$

$$\|\Delta x\| \leq |||A^{-1}|||\,\|\Delta b\| \qquad (1)$$

On utilise $b = Ax$

$\Rightarrow \|b\| \leq |||A|||\,\|x\|$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{|||A|||}{\|b\|} \qquad (2)$$

On multiplie (1) par (2)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq |||A^{-1}||| \; |||A||| \; \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\mathrm{cond}\, A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (3)$$

(c'est la motivation pour introduire le conditionnement)

b) Déterminer deux vecteurs b et Δb tels que l'on ait égalité dans (3).

"Exemple trivial" : On choisit $\Delta b = 0$. Alors $\Delta x = 0$

et $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 0 = (\mathrm{cond}\, A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 0.$

Exemple plus compliqué :

$|||A||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, donc $\exists u \in \mathbb{K}^n$, $|||A||| = \|Au\|$
($\|u\| = 1$)

$|||A^{-1}||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}$, donc $\exists v \in \mathbb{K}^n$, $|||A^{-1}||| = \|A^{-1}v\|$

Donc égalité si $\Delta b = u$ et $b = v$.

Rq : En dimension finie, $|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
donc le sup est atteint.

(c) $\begin{cases} Ax = b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \end{cases}$, $b \in \mathbb{K}^n$
$x + \Delta x \neq 0$.

Montrer que $\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq (\mathrm{cond}\, A) \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}$

(c) $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$

$$\cancel{Ax} + A\Delta x + \Delta A\, x + \Delta A\, \Delta x = \cancel{b}$$

$$A\Delta x = -\Delta A(x+\Delta x).$$

A inversible donc $\Delta x = -A^{-1}\Delta A\,(x+\Delta x)$

donc $\|\Delta x\| \leq |||A^{-1}|||\;\|\Delta A(x+\Delta x)\|$

$$\|\Delta x\| \leq |||A^{-1}|||\;|||\Delta A|||\;\|x+\Delta x\|$$

Ainsi $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq |||A^{-1}|||\;|||\Delta A|||$$

$$\leq |||A|||\;|||A^{-1}|||\;\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}$$

"à quel point on a modifié la solution"

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq (\mathrm{cond}\, A)\,\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}$$

"à quel point on a modifié A"

ce que demande l'énoncé.

Egalité si $\Delta A = 0$ (car cela implique $\Delta x = 0$).

2) (a) Montrer que pour toute matrice singulière B, on a $\dfrac{1}{\mathrm{cond}\, A} \leq \dfrac{|||A-B|||}{|||A|||}$

(a) Soit $b \in \mathbb{K}^n$

Soient x et y des solutions de

$$\begin{cases} Ax = b \\ By = b \end{cases}$$

(A inversible
B singulière = non inversible)

D'après le résultat de la question 1c, on a

$$(4) \quad \frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq (\text{Cond } A) \frac{|||B-A|||}{|||A|||}, \quad \forall b \in \mathbb{K}^n.$$

(dans la question précédente $\begin{cases} B = A + \Delta A \\ y = x + \Delta x \end{cases}$

$y - x = \Delta x$
$B - A = \Delta A$)

On choisit $b = 0$.

$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ car A inversible.

B est non inversible donc $\dim \ker B \geq 1$

donc $\exists y \in \mathbb{K}^n, y \neq 0, By = 0$.

En utilisant (4)

$$1 = \frac{\|y - 0\|}{\|y\|} \leq (\text{Cond } A) \frac{|||B-A|||}{|||A|||}$$

donc $\dfrac{|||B-A|||}{|||A|||} \geq \dfrac{1}{\text{Cond } A}$

b) Soit $u \in \mathbb{K}^n$, $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = |||A^{-1}|||_2$

On pose $B_0 = A - \dfrac{u(A^{-1}u)^*}{|||A^{-1}|||_2^2}$

Montrer que $|||A - B_0||| = \dfrac{1}{|||A^{-1}|||_2}$.

et en déduire $\dfrac{1}{\text{cond}_2 A} = \min\left\{ \dfrac{|||A-B|||_2}{|||A|||_2},\ B \text{ singulière} \right\}$.

$$A - B_0 = \frac{u\,(A^{-1}u)^*}{|||A^{-1}|||_2^2}$$

$$= u v^*, \quad \text{avec} \quad v = \frac{A^{-1}u}{|||A^{-1}|||_2^2}$$

D'après l'exo 5, TD 2, $|||C|||_2^2 = \rho(C^*C)$

$$\begin{aligned}(A-B_0)^*(A-B_0) &= (uv^*)^* u v^* \\ &= v\, u^* u\, v^* \\ &= v\, \|u\|_2^2\, v^* \\ &= v v^*\end{aligned}$$

Cette matrice a été étudiée à l'exo 5, TD 1.
et est de rang 1.

Unique valeur propre non nulle $\langle v|v\rangle$

$$\langle v|v\rangle = \frac{\|A^{-1}u\|_2^2}{|||A^{-1}|||_2^4}$$

$$= \frac{1}{|||A^{-1}|||_2^2}$$

donc $\|A-B_0\|^2 = \dfrac{1}{|||A^{-1}|||_2^2}$

Comme $\|A-B_0\| \geqslant 0$, on a bien

$$\|A-B_0\| = \frac{1}{|||A^{-1}|||_2}.$$

Donc l'inégalité démontrée à la question 2a) est une égalité pour le choix $B = B_0$.

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_2\, A} = \min\left\{ \frac{|||A-B|||_2}{|||A|||_2},\ B \text{ singulière} \right\}$$

$\boxed{\text{Exo 9}}$ $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon > 0$

1) Résoudre $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$

1) • On pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 + (1+\varepsilon) x_2 = 2 & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1) \Rightarrow \varepsilon x_2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$ car $\varepsilon > 0$

et par suite $x_1 = 2$

donc la solution est $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (3) \\ x_1 + (1+\varepsilon) x_2 = 2+\varepsilon & (4) \end{cases}$$

$(4) - (3)$: $\varepsilon x_2 = \varepsilon \Rightarrow x_2 = 1$ $(\varepsilon > 0)$

par suite $x_1 = 1$.

donc la solution est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Au final on trouve $\begin{cases} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{pour } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{pour } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix} \end{cases}$

rien à voir.

très proches

2) Estimer $\mathrm{cond}_2(A_\varepsilon)$.

D'après exo 8, question 1a.

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \mathrm{cond}_2(A_\varepsilon) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

Ici $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2^2+0^2}} \leq \mathrm{cond}_2 A_\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon^2}}{\sqrt{2^2+2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{cond}_2 A_\varepsilon \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{cond}_2 A_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon}}$$ qui diverge lorsque $\varepsilon \to 0^+$!

Or $\mathrm{cond}_2 A_\varepsilon = |||A^{-1}|||_2 \; |||A|||_2$

A est symétrique, donc normale, donc

$$|||A|||_2 = \rho(A)$$

Cherchons les vp de A

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(1+\varepsilon-x) - 1$$

$$= x^2 - (2+\varepsilon)x + \varepsilon$$

$$\Delta = (2+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon$$
$$= \varepsilon^2 + 4\varepsilon + 4 - 4\varepsilon$$
$$= \varepsilon^2 + 4$$

$$x_\pm = \frac{(2+\varepsilon) \pm \sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}$$, x_+ et x_- sont strictement positifs et $x_+ > x_-$

$$|||A|||_2 = \rho(A) = x_+ = \max\{x_+, x_-\}$$

$$|||A^{-1}|||_2 = \rho(A^{-1}) = \max\left\{\frac{1}{x_+}, \frac{1}{x_-}\right\}$$
$$= \frac{1}{x_-}$$

Au final $\text{cond}_2 A = |||A|||_2 \, |||A^{-1}|||_2$

$$= \frac{x_+}{x_-}$$

$$= \frac{2+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4}}$$

$$= \frac{(2+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})(2+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})}{(2+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4})(2+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})}$$

$$= \frac{(2+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})^2}{(2+\varepsilon)^2-(\varepsilon^2+4)}$$

$$\mathrm{cond}_2 A = \frac{\left(2+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4}\right)^2}{4\varepsilon}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$

$$\mathrm{cond}_2 A \sim \frac{4^2}{4\varepsilon}$$

$$\sim \frac{4}{\varepsilon}.$$

Morale : !! si le conditionnement est très grand, la solution $x+\Delta x$ du système $A(x+\Delta x)=b+\Delta b$ peut être très différente de la solution x du système $Ax=b$, même si Δb est petit !!

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

cf exo 8.

Exo 6 — Corrigé offline

1) Montrer que si $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ satisfont

$$C_1 \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2 \|\cdot\|_* \ , \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ strictement positifs}$$

alors $\frac{C_1}{C_2} |||\cdot|||_* \leq |||\cdot|||_\# \leq \frac{C_2}{C_1} |||\cdot|||_*$

1) Soit $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$.

$$\|Ax\|_\# \leq C_2 \|Ax\|_*$$

$$\|x\|_\# \geq C_1 \|x\|_* \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_\#} \leq \frac{1}{C_1} \frac{1}{\|x\|_*}$$

donc $\dfrac{\|Ax\|_\#}{\|x\|_\#} \leq \dfrac{C_2}{C_1} \dfrac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$

donc $|||\cdot|||_\# \leq \frac{C_2}{C_1} |||\cdot|||_*$.

De manière similaire, on obtient $|||\cdot|||_\# \geq \frac{C_1}{C_2} |||\cdot|||_*$

2) (a) $|||A|||_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\, |||A|||_2$

$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}$

$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

Soient $v_1, \dots, v_n$ les valeurs propres (≥ 0) de A^*A ordonnées $0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n$.

Alors $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i}$

$$|||A|||_2 = \sqrt{v_n} \leq \|A_F\|_F \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_n} = \sqrt{n}\sqrt{v_n} = \sqrt{n}\,|||A|||_2$$

(b) $\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}| \leq |||A|||_2 \leq n \max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}|$

$$|||A|||_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Soient i_0 et j_0 les indices qui vérifient

$$|A_{i_0j_0}| = \max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}|$$

On choisit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j_0 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$ $\|x\|_2 = 1$ et $Ax = \begin{pmatrix} A_{1j_0} \\ \vdots \\ A_{nj_0} \end{pmatrix}$

$$\|Ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij_0}|^2\right)^{1/2}$$

$$\geq \left(|A_{i_0j_0}|^2\right)^{1/2} = |A_{i_0j_0}|$$

donc $\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}| \leq |||A|||_2$.

. Soit $x \in \mathbb{K}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right|^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}||x_j|\right)^2}$$

$$\leq |A_{i_0j_0}| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right)^2}$$

$$\leq |A_{i_0j_0}| \sqrt{n} \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot 1$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \quad \text{Cauchy-schwarz}$$

$$\leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

donc $\|Ax\|_2 \leq |A_{i_0 j_0}|\, n\, \|x\|_2$

donc $|||A|||_2 \leq n \max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}|$.

(c) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ $\quad i_0$ t.q $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$

$$\|x\|_\infty = \left(|x_{i_0}|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i_0}^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\, |x_{i_0}| = \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$, donc en utilisant la question 1, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_\infty \leq |||A|||_2 \leq \frac{\sqrt{n}}{1} |||A|||_\infty$$

(d) $\frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_1 \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}\, |||A|||_1$

Methode 1: $|||A|||_2 = |||A^*|||_2$ (exo 5)

On remarque que $|||A^*|||_\infty = |||A|||_1$ (exo 4)

donc $\frac{1}{\sqrt{n}} |||A^*|||_\infty \leq |||A^*|||_2 \leq \sqrt{n}\, |||A^*|||_\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_1 \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}\, |||A|||_1$$

Méthode 2 : $\frac{\|x_1\|}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Cauchy-Schwarz

$$\|x_1\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \underbrace{\sum_{i \neq j} |x_i||x_j|}_{\geq 0.}$$

En utilisant la question 1,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_1 \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}\, |||A|||_1$$

(e) $|||A|||_2 \leq \sqrt{|||A|||_\infty |||A|||_1}$

D'après le cours, pour toute norme subordonnée :

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

En prenant la norme $|||\cdot|||_1$, on obtient

$$\rho(B) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |B_{ij}|\right)$$

On utilise $|||A|||_2^2 = \rho(A^*A)$

$$(A^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^*)_{ik} A_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{ik}} A_{kj}$$

$$\rho(A^*A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{ki}} A_{kj} \right|$$

$$\leq \max_j \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |A_{ki}|\,|A_{kj}|$$

$$\leq \max_j \sum_{k=1}^{n} |A_{kj}| \sum_{i=1}^{n} |A_{ki}|$$

$$\leq \max_j \sum_{k=1}^{n} |A_{kj}| \max_k \sum_{i=1}^{n} |A_{ki}|$$

$$\leq |||A|||_1 \, |||A|||_\infty$$

donc $|||A|||_2 \leq \sqrt{|||A|||_1 \, |||A|||_\infty}$.

(f) $\frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_p \leq |||A|||_F \leq \sqrt{n} \, |||A|||_p$ pour $p=1$ et $p=\infty$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|A\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{n} \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{n} \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{n} \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right)$$

$$\leq \sqrt{n} \, |||A|||_\infty$$

$$\|A\|_F \geq \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\geq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\geq \max_i \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_\infty.$$

Et on procède de même pour $|||\cdot|||_1$.