

Fiche 3 LU et Cholesky.

Rappel: Une factorisation LU d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si elle existe, est une factorisation de la forme.

$$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangulaire} \\ \text{inférieure} \\ \text{avec des 1 dans} \\ \text{la diagonale}}}{L} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangulaire} \\ \text{supérieure.}}}{U} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Si A est hermitienne définie positive (toutes les vp sont > 0)

On peut écrire $A = L L^*$
où L est triangulaire inférieure, et tous ses éléments diagonaux sont > 0
cette décomposition est unique.

Exo 1 1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomp. Cholesky

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit sans la forme CTC .

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky avec $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$6) D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Cholsky par DDT

(b) Cholsky par $D^T D$.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - 3x + 1$$

$$\Delta = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$x_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{et } x_+, x_- \text{ sont } > 0$$

donc A est sym. def. pos.

Ou bien : on vérifie que les mineurs principaux ont déterminant > 0 :

$$2 > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Vrai

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique

donc Faux

$$4) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$C^T C$ est symétrique (car $(C^T C)^T = C^T C^{TT} = C^T C$)

et la matrice donnée plus haut n'est pas symétrique.

Faux

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique.

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - 6x + 4$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \\ = 36 - 16 \\ = 20$$

$$x_{\pm} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= 3 \pm \sqrt{5}$$

x_+ et x_- sont > 0 .

donc A est sym. déf. positive. donc admet une décomposition de Cholesky

Vrai

$$A = LL^T$$

et les éléments diagonaux de L sont strictement positifs

Faux

$$6) \quad DD^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } C_3 = C_2 + C_1$$

$$\text{donc } \text{rg } DD^T \leq 2$$

$$\text{donc dim ker } DD^T \geq 1 \text{ donc}$$

\exists une valeur propre nulle

donc pas sym. déf. pos.

Faux

$$D^T D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

symétriques, valeurs propres.

$$x_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_+ > 0$$

$$x_- > 0$$

donc

Vrai

$$3) B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LU ?$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 - l_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = U$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

Si l'on pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a

$$E_1 \cdot B = U$$

$$B = E_1^{-1} \cdot U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= L \cdot U$$

avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(exercice 3,
TD 1)
inverses des matrices
triangulaires inférieures

Exo 2 1) Donner la décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On utilise la méthode du pivot de Gauss

ligne pivot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ligne pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc on a trouvé $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(I)

"Recette"

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L_{ij} = le coefficient avec lequel on a multiplié la ligne pivot i avant de la retrancher à la ligne j

Ici $j=4$ toujours et $i=1,2,3$ (on a retranché +1 à chaque fois)

→ vérifiez chez vous cette phrase

Provenons que c'est correct sur notre exemple:

On a fait comme opérations successives $L_4 \rightarrow L_4 - L_2$ ①
 $L_4 \rightarrow L_4 - L_2$ ②
 $L_4 \rightarrow L_4 - L_3$ ③

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 A = U$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} U$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} U$$

exo 3
fiche 4

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} U$$

donc $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Rem: Ici, et dans la plupart des exemples, l'algorithme de Gauss s'est bien déroulé: on a toujours pu trouver une ligne pivot par la retrancher à une ligne inférieure et produire de 0. Ce n'est pas toujours possible.

Dans ce cas, il faut en plus permurer des lignes.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $PA = LU$ pour une matrice de permutation P et trouver L, U

Une matrice de permutation, est une matrice dont tous les coefficients sont soit 0 soit 1, avec un et un seul 1 par ligne, un et un seul 1 par colonne.

Par exemple A est une matrice de permutation

Propriété: une matrice de permutation est orthogonale,
 $PP^T = P^T P = I_n$.

On a ici: $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_U$

donc on a bien $PA = LU$

Si le pivot de gauss nécessite une permutation, on ne peut plus écrire $A = LU$, mais par contre $\exists P$ de permutation k.g $PA = LU$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

donc $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$

et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$, $L_{21} = 1/2$
 $L_{32} = 2/3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} A = U$$

$$E_2 E_1 A = U$$

$$A = (E_2 E_1)^{-1} U$$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} U$$

donc la formule (I) marche bien.

Exo chez vous: Prenez une matrice L et une matrice U de votre choix, faites le produit LU , et retrouvez par gauss la décomposition.

Exo 3 | Décomposition de Cholesky.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ A_n est la matrice carrée donc les éléments sont $(A_n)_{i,j} = \min(i,j)$

On décide que la question 1 est à la fin.

1) Echeelonner les matrices A_2, A_3 . Montrer qu'elles sont sym. def. pos et donner la décomposition de Cholesky.

$$1) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\text{et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{21} = +1$$

$$\text{donc } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = L \cdot L^T \quad \text{décomposition de Cholesky}$$

(unique si les éléments diagonaux sont strictement positifs)

Et par théorème, si A admet une décomposition de Cholesky, alors elle est symétrique définie positive.

(Si on peut aussi vérifier en calculant les valeurs propres, ou bien en utilisant le critère de Sylvester (cf cours))

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= L \cdot L^T \quad (\text{Cholesky de nouveau})$$

3) Dériver la décomposition de Cholesky de A_n .

On conjecture $A_n = L \cdot L^T$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} L_{ij} = 1 \text{ si } i \geq j \\ L_{ij} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Faisons le produit $L \cdot L^T$ et vérifions que l'on trouve bien A .

$$(L \cdot L^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} (L^T)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{jk}$$

$L_{ik} L_{jk} = 1$ si $i \geq k$ et $j \geq k$, $L_{ik} L_{jk} = 0$ sinon

dans la somme, on ne garde que les termes $k \leq i$ et $k \leq j$
soit $k \leq \min(i, j)$

$$(LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 \cdot 1$$

$$= \min(i,j)$$

$$= (A_n)_{ij}$$

donc c'est bien la décomposition de Cholesky de A_n .

3) $\det A_n = ?$

$$\det A_n = \det(LL^T)$$

$$= (\det L) \cdot (\det L^T)$$

$$= (\det L)^2$$

et L triangulaire inférieure, $\det L = 1$.

Un cas moins favorable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - l_1 \\ l_4 \rightarrow l_4 + 2l_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

on voudrait
interchanger cette
ligne comme
première mais
pas possible.

$$\xrightarrow[\substack{\text{échanger} \\ l_2 \text{ et } l_3}]{\substack{l_4 - l_2 \\ \cdot 2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$L_4 - \frac{5}{2}L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix} = U$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P = \text{Permutation des lignes 2 et 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} A = U$$

$$E_2 P E_1 A = U$$

$$E_2 P E_1 P^T P A = U \quad \text{car } P^T P = I_4$$

$$\text{et } P E_1 P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } PA = (E_2 P E_1 P^T)^{-1} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}}_L U$$

À la fin $P \cdot A = L U$

Rq: On peut aussi échanger les lignes 2 et 4.