Fiche 3 — LU et Cholesky.

Rappel : Une factorisation LU d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si elle existe, est une factorisation de la forme

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots & \\ (0) & \ddots \end{pmatrix}$$

L : triangulaire inferieure avec des 1 dans la diagonale

U : triangulaire superieure.

Si A est hermitienne définie positive (toutes les vp sont > 0)

On peut écrire $A = L L^*$

où L est triangulaire inferieure, et tous ses éléments diagonaux sont > 0

cette decomposition est unique.

Exo 1

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une decomp. Cholesky

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme $C^T C$.

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une decomposition de Cholesky avec $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

6) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Cholesky par DD^T

(b) Cholesky par D^TD.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique

$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}$

$= x^2 - 3x + 1$

$\Delta = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

$x_\pm = \dfrac{+3 \pm \sqrt{5}}{2}$ et x_+, x_- sont > 0

donc A est sym. def. pos. Vrai

Ou bien : on vérifie que les mineurs principaux ont déterminant > 0 :

$2 > 0$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique

donc Faux

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

C^TC est symétrique (car $(C^TC)^T = C^TC^{TT}$
$= C^TC$)

et la matrice donnée plus haut n'est pas symétrique. Faux

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique.

$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix}$

$= x^2 - 6x + 4$

Ou bien : critère sur les mineurs principaux.

$\Delta = 6^2 - 4\times 4$
$= 36 - 16$
$= 20$

$$x_\pm = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$= 3 \pm \sqrt{5}$ $\quad x_+$ et x_- sont > 0.

donc A est sym déf positive. donc admet une décomposition de Cholesky

Vrai

$$A = L L^T$$

et les éléments diagonaux de L sont strictement positifs

Faux

6) $DD^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C_3 = C_2 + C_1$

donc rg $DD^T \leq 2$

donc dim ker $DD^T \geqslant 1$ donc $\exists$ une valeur propre nulle donc pas sym. déf. pos.

Faux

$D^T D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ symétriques, valeurs propres.

$x_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2}$ $\quad x_+ > 0$
$x_- > 0$

donc Vrai

3) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = L\,U$?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = U$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

Si l'on pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a

$$E_1 . B = U$$

$$B = E_1^{-1} . U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

(exercice 3, TD 1)
inverses des matrices triangulaires inférieures

$$= L . U$$

avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exo 2 1) Donner la décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On utilise la méthode du pivot de Gauss

ligne pivot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ligne pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc on a trouvé $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(I)

"Recette"

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L_{ij} = le coefficient avec lequel on a multiplié la ligne pivot i avant de la retrancher à la ligne j

↳ vérifiez chez vous cette phrase

Ici $j = 4$ toujours
et $i = 1, 2, 3$
(on a retranché $+1$ à chaque fois)

Prouvons que c'est correct sur notre exemple :

On a fait comme opérations successives $L_4 \to L_4 - L_1$ ①
$L_4 \to L_4 - L_2$ ②
$L_4 \to L_4 - L_3$ ③

$$E_3 . E_2 . E_1 \, A = U$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} U$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} U$$

exo 3 fiche 1

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} U$$

donc $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

<u>Rem</u> : Ici, et dans la plupart des exemples, l'algorithme de Gauss s'est bien déroulé : on a toujours pu trouver une ligne pivot pour la retrancher à une ligne inférieure et produire des 0. Ce n'est pas toujours possible.

Dans ce cas, il faut en plus permuter des lignes.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $PA = LU$ pour une matrice de permutation P. et trouver L. U

Une matrice de permutation, est une matrice dont tous les coefficients sont soit 0 soit 1, avec un et un seul 1 par ligne, un et un seul 1 par colonne.

Par exemple A est une matrice de permutation

<u>Propriété</u> : une matrice de permutation est orthogonale,

$$PP^T = P^TP = I_n.$$

On a ici $\underbrace{A^T}_{P}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$

donc on a bien $PA = LU$

Si le pivot de gauss nécessite une permutation, on ne peut plus écrire $A = LU$, mais par contre $\exists P$ de permutation t.q $PA = LU$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2} L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{2}{3} L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

donc $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$

et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad L_{21} = 1/2$, $L_{32} = 2/3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} A = U$$

$$E_2 E_1 A = U$$

$$A = (E_2 E_1)^{-1} U$$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} U$$

donc la formule marche bien. (I)

Exo chez vous: Prenez une matrice L et une matrice U de votre choix, faites le produit LU, et retrouver par guess la décomposition.

$\boxed{\text{Exo 3}}$ Décomposition de Cholesky.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ A_n est la matrice carrée dont les éléments sont $(A_n)_{i,j} = \min(i,j)$

On décide que la question 1 est à la fin.

1) Echelonner les matrices A_2, A_3. Montrer qu'elles sont sym. def. pos et donner la décomposition de Cholesky.

1) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U$

et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_{21} = +1$

donc $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_2 = L . L^T$ décomposition de Cholesky (unique si les éléments diagonaux sont strictement positifs)

Et par théorème, si A admet une décomposition de Cholesky, alors elle est symétrique définie positive.

(Sinon on peut aussi vérifier en calculant les valeurs propres, ou bien en utilisant le critère de Sylvester (cf cours))

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= L \cdot L^T$ (Cholesky de nouveau)

3) Deviner la décomposition de Cholesky de A_n.

On conjecture $A_n = L \cdot L^T$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & 1 & \\ \vdots & 1 & \ddots \\ 1 & \cdots 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} L_{ij} = 1 \text{ si } i \geqslant j \\ L_{ij} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Faisons le produit $L \cdot L^T$ et vérifions que l'on trouve bien A.

$$(L \cdot L^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} (L^T)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} L_{ik} L_{jk}$$

$L_{ik} L_{jk} = 1$ si $i \geqslant k$ et $j \geqslant k$, $L_{ik} L_{jk} = 0$ sinon

dans la somme, on ne garde que les termes $k \leq i$ et $k \leq j$

soit $k \leqslant \min(i, j)$

$$(LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1.1$$

$$= \min(i,j)$$

$$= (A_n)_{ij}$$

donc c'est bien la décomposition de Cholesky de A_n.

3) $\det A_n = ?$

$$\det A_n = \det(LL^T)$$

$$= (\det L).(\det L^T)$$

$$= (\det L)^2$$

et L triangulaire inférieure, $\det L = 1$.

Un cas moins favorable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 + 2L_1}]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

on voudrait utiliser cette ligne comme pivot mais pas possible.

$$\xrightarrow[L_2 \text{ et } L_3]{\text{échanger}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - \frac{L_2}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 - \frac{5}{2}L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix} = U$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P = \text{Permutation des lignes 2 et 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} A = U$$

$$E_2 P E_1 A = U$$

$$E_2 P E_1 P^T P A = U \qquad \text{car } P^T P = I_4$$

$$\text{et } P E_1 P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } PA = \left(E_2 P E_1 P^T\right)^{-1} U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} U$$

Au final $P.A = LU$

Rq : On peut aussi échanger les lignes 2 et 4.