$\boxed{\text{Fiche 4}}$ Décompositions (suites)

$\boxed{\text{Exo 5}}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$

Commensons par essayer de déterminer une décomposition L.U

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_1]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{2}{3}L_2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/4 & 2/4 & 2/4 \\ 0 & 9/9 & 6/9 \\ 0 & 0 & 16/16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= L \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} L^T$$

$$= L \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} L^T$$

On pose $\tilde{L} = L \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ainsi $\tilde{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et on a bien $\tilde{L}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} L^T$

donc $A = \tilde{L} (\tilde{L})^T$ les éléments diagonaux de $\tilde{L}$ sont bien > 0, c'est une décomposition de Cholesky.

<u>Méthode pour trouver la décomposition de Cholesky pour une matrice sym. def pos:</u>

Même algo que pour LU, puis on factorise par une matrice diagonale D contenant les éléments diagonaux <u>strictement positifs</u> de U. (s'ils ne sont pas > 0, c'est que la matrice n'est pas sym. def. pos)

$$A = LU = LDV.$$

On reconnait $V = L^T$

Enfin, on obtient $A = LDL^T$

$$A = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T$$

Cholesky

Remarques: • Si l'on parvient à trouver une décomposition de Cholesky, alors la matrice est sym. def. pos.

• Pour montrer directement qu'une matrice sym est def. pos, on peut aussi utiliser le critère de Sylvester sur les mineurs principaux. Pour une matrice 3x3 cela donne

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ sym. def. pos ssi } a>0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}>0$$

Par la matrice $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$ de l'exercice, on a bien

$$4>0,\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}=40-4=36>0,\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{vmatrix}=576>0$$

(Faire le calcul)

• On a un critère similaire pour montrer directement qu'une matrice admet une décomposition LU.

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU ssi

$$a\neq 0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\neq 0,\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\neq 0.$$

3) Résoudre $Ax=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}$, $A=\tilde{L}\tilde{L}^T$

3) On doit résoudre $\tilde{L}\,\underbrace{\boxed{\tilde{L}^T x}}_{y}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}$

On pose $y=\tilde{L}^T x$. On cherche d'abord la solution y de $\tilde{L}y=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}$, et ensuite x est la solution de $\tilde{L}^T x=y$.

On pose $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\tilde{L}y=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}$$

donc $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{96}{4} = 24$

donc $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$.

$$(\tilde{L})^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$4x_3 = 24 \Rightarrow x_3 = \frac{24}{4} = 6$

$3x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 3x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = -4$.

$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -x_2 - x_3 = -2$

$\Rightarrow x_1 = -1$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Rq : C'est une des applications des décompositions L.U et Cholesky, car les systèmes triangulaires supérieurs / inférieurs sont beaucoup plus simples à résoudre

$\boxed{\text{Exo 1}}$ Temps de calcul du déterminant

(1) $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

S_n groupe des permutations, $\varepsilon(\sigma)$ signature de la permutation.

1) Calculer $c(n)$, le nombre d'opérations $(+, -, \times)$ nécessaires au calcul du déterminant en utilisant (1)

1) $\text{Card } S_n = n!$

Il faut $(n-1)$ multiplications pour évaluer le produit $A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$

(une opération si $n = 2$)

et une autre multiplication par $\varepsilon(\sigma)$.

Donc chaque terme dans la somme nécessite n opérations

Au final, on répète ces multiplications $n!$ fois, donc

$$c(n) = n! \times n.$$

2) déterminant 20×20 avec cette méthode et un ordi qui fait 10^9 opérations par secondes. Même question pour un déterminant 100×100

2) $20 \times 20! \simeq 4.8 . 10^{19}$

Avec 10^9 op / seconde, il faudrait un temps

$$\frac{4.8 . 10^{19}}{10^9} = 4.8 . 10^{10} \text{ s}$$
$$= 1542 \text{ années.}$$

$100 \times 100! \simeq 10^{160}$

Méthode extrêmement inefficace.

Pour la même raison, calculer l'inverse en utilisant les formules de Cramer est très inefficace.

Exo 2 Nombre d'opérations pour L . U

Si l'on peut écrire $A = L \cdot U$, alors

$$\det A = (\det L)(\det U) = 1 \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

donc si l'on a une décomposition, on peut calculer très rapidement le déterminant. (n opérations)

On va calculer la prochaine fois le nombre d'opérations nécessaire pour effectuer cette décomposition LU.

Nombres d'opérations (additions, multiplications soustractions, divisions)

Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$

$v = (v_1, \dots, v_n)$ ——

$A = (A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carrée de $\mathbb{R}^n$.

λ, μ, ν des scalaires de $\mathbb{R}$.

- somme de deux scalaires : $\lambda + \mu$: une addition
- produit —— $\lambda \mu$: un produit
- $\lambda + \mu\nu$: une somme + un produit : 2 opérations.

- Somme de deux vecteurs.

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)$$

n additions $\to$ n op.

- λu

$$\lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$$

n multiplications. $\mathcal{O}(n)$

- $\langle u|v \rangle$

$$\langle u|v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

n produits (les $u_i v_i$)

$+$ somme de n termes ($n-1$ additions)

$\to$ $2n-1$ op. $\mathcal{O}(n)$

- Au^T

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \\ \\ A_{n1}u_1 + \cdots + A_{nn}u_n \end{pmatrix}$$

Si l'on note $v^T = Au^T$, alors $v_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j$

Chaque v_i nécessite $\begin{cases} n \text{ produits} \\ n-1 \text{ additions.} \end{cases} \to 2n-1$ op.

On répète cela pour tous les $i \in \{1, \dots, n\}$

$n(2n-1)$ op $\mathcal{O}(n^2)$

- AB , $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \text{ produits} \\ n-1 \text{ sommes} \end{array} \right\} 2n-1 \text{ op.}$$

et l'on répète pour tous les $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$

Au final $n^2(2n-1)$ op $\Big)$ $\mathcal{O}(n^3)$

<u>Ou bien</u> : Faire un produit de matrice c'est comme faire n fois un produit matrice vecteur.

Rq (hors programme)
Il existe des méthodes très très astucieuses pour faire le produit de matrices encore plus rapidement en $\mathcal{O}(n^{\varepsilon})$ avec $\varepsilon = \frac{\ln 7}{\ln 2} \simeq 2{,}81$. (Strassen).
sujet assez subtil.

Retour à l'exercice 2

LU par Gauss (je change légèrement l'exo)

étape 1

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{pour } i=2,\dots,n]{L_i \to L_i - \alpha_i L_1} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \end{pmatrix}$$

On fait le pivot de Gauss.

l'opération : $L_i \to L_i - \alpha_i L_1$ demande $\underbrace{n}_{\text{multiplic}^{\circ} \text{ par scalaire}} + \underbrace{n}_{\text{addition}} = 2n$ op.

On fait ces $2n$ opérations pour $i = 2, \dots, n$ c'est à dire $(n-1)$ fois.

Première étape du pivot de Gauss : $(n-1)(2n)$ op.

Etape 2 :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \boxed{\bullet} & \bullet & & \bullet \\ \vdots & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \vdots & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & & \bullet \end{pmatrix} \xrightarrow[i=3,\dots,n]{L_i \to L_i - \beta_i L_2} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

pivot

$$L_i \to L_i - \beta_i L_2 \; : \; \underbrace{n-1}_{\substack{\text{multiplication} \\ \text{par un scalaire} \\ \text{mais on sait que} \\ \text{le premier élément} \\ \text{est } 0.}} + \underbrace{n-1}_{\substack{\text{addition} \\ \text{(même raison qu'à gauche)}}} = 2n-2 \text{ op.}$$

On le fait pour $i = 3, \dots, n$ soit $n-2$ fois.

$$2(n-1)(n-2) \quad \text{op.}$$

- De même, l'étape k nécessite $2(n-k)(n-k+1)$ op.

Il y a $(n-1)$ étapes dans le pivot de Gauss, donc au final

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)(n-k+1) \qquad k' = n-k \qquad \begin{pmatrix} k=1 : k' = n-1 \\ k = n-1 : k' = \\ n-(n-1) = 1 \end{pmatrix}$$

$$S = 2 \sum_{k'=1}^{n-1} k'(k'+1)$$

Pour calculer S, on utilise $\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

ou bien : $S = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^3 - k^3 - 1}{3}$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)^3 - k^3\right] - \frac{2}{3}(n-1)$$

$$= \frac{2}{3}\left[n^3 - 1\right] - \frac{2}{3}(n-1)$$

$$= \frac{2}{3}(n^3 - n)$$

$S \sim \frac{2}{3}n^3$ lorsque $n \to \infty$.

Pour une matrice 100×100 : $\frac{2}{3}100^3 = \frac{2}{3} \times 10^6$

Fait en une fraction de seconde (comparer à l'exercice 1).

$\boxed{\text{Exo 4}}$ Décomposition UL (juste l'idée)

Sur l'exemple $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Faisons d'abord LU.

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{1}{4}L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & -1 & 1/4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}}_{= U}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Idée :</u> Faire LU en utilisant les colonnes plutôt que les lignes, ou bien garder les lignes et utiliser la dernière comme pivot.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 3L_3]{L_2 \to L_2 - 4L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$$

pivot   pivot

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L}$$

Très similaire à $L.U$

<u>Rq :</u> Si l'on a $A = LU$, prendre la transposée ne nous avance pas.

$$A^T = (LU)^T = \underbrace{U^T}_{\text{triangulaire inférieure}} . \underbrace{L^T}_{\text{triangulaire supérieure}}$$

car $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

ce qui est aussi une décomposition $L.U$!

Exo 6 QR par Gram-Schmidt. (cf cours)

$p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$.

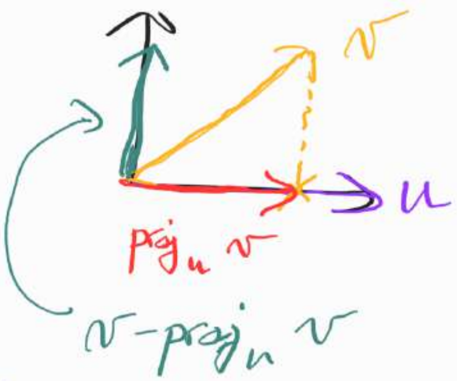
On considère p vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{K}^n$, linéairement indépendants.

1) Rappeler le procédé d'orthonormalisation de Schmidt

<u>Objectif</u> : Construire à partir des $v_1, \dots, v_p$ une famille de p vecteurs orthonormés $q_1, \dots, q_p$ tels que $\mathrm{vect}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{vect}(q_1, \dots, q_p)$

$(\langle q_i | q_j \rangle = \delta_{ij})$

On définit $\mathrm{proj}_u(v) = \dfrac{\langle u | v \rangle}{\langle u | u \rangle} u$



On pose $u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1} v_2$$

$$u_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1} v_3 - \mathrm{proj}_{u_2} v_3$$

$$\vdots$$

$$u_p = v_p - \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{proj}_{u_j} v_p$$

Rq : $\mathrm{proj}_u = \mathrm{proj}_{\lambda u}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

On peut vérifier l'orthogonalité des u_i pour $i = 1, \dots, p$.

On pose $q_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ (normalisation)

et l'on obtient une famille de vecteurs orthonormés.

2) $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ de rang p. ("$A = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$")

Trouver une décomposition QR.

2) $A = (v_1, \dots, v_p)$ où les v_i sont des vecteurs colonnes.

$\operatorname{rg} A = p$. D'après le théorème du rang

$$\dim \ker A = p - \operatorname{rg} A$$
$$= 0$$

donc $\ker A = \{0\}$ donc les v_i forment une famille libre, donc on peut orthonormaliser via Gram-Schmidt

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{v_1}{\|v_1\|} \Rightarrow v_1 = \|v_1\| q_1$$
$$v_1 = \langle q_1 | v_1 \rangle q_1$$

De même, en utilisant $u_i = \|u_i\| q_i$, il vient

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} q_j \langle q_j | v_k \rangle \quad \text{pour } k = 1, \dots, p$$

Donc

$$A = (v_1 \cdots v_p) = \underbrace{(q_1 \cdots q_p)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \langle q_1|v_1\rangle & & \langle q_1|v_p\rangle \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 \cdots 0 & & \langle q_p|v_p\rangle \end{pmatrix}}_{R}$$

$$\underset{n\times p}{A} = \underset{n\times p}{Q} \cdot \underset{p\times p}{R}$$

On vérifie bien que $A = Q \cdot R$, avec R triangulaire supérieure.

Les colonnes de Q sont bien orthonormées
$$\left(\Rightarrow Q^T Q = I_p \right).$$

Factorisation unique ? Elle n'est pas unique... Par exemple

$\tilde{q}_1 = - q_1$ et A

$$A = \left(\tilde{q}_1 \; q_2 \; \cdots \; q_p \right) \begin{pmatrix} \langle \tilde{q}_1 | v_1 \rangle & \cdots & \langle \tilde{q}_1 | v_1 \rangle \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & \langle q_p | v_p \rangle \end{pmatrix}$$

Unicité

(cours)

$$A = Q_1 \cdot R_1 = Q_2 \cdot R_2$$

$$R_1 = \underbrace{Q_1^* Q_2}_{Q} R_2 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} Q^* Q &= (Q_1^* Q_2)^* Q_1^* Q_2 \\ &= Q_2^* \underbrace{Q_1 Q_1^*}_{I} Q_2 \\ &= Q_2^* Q_2 \\ &= I. \end{aligned}$$

donc $Q = Q_1^* Q_2$ est unitaire, carrée, donc diagonalisable

Or les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module 1.

$$\left(\begin{array}{l} Ux = \lambda x \quad \text{car vp.} \\ \|Ux\| = \|x\| \quad \text{car unitaire} \\ \text{donc } \|\lambda x\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda|\,\|x\| = \|x\| \\ \qquad\qquad \Rightarrow |\lambda| = 1 \end{array}\right)$$

$$Q_1^* Q_2 = \underbrace{R_1}_{\text{triang sup}} \underbrace{R_2^{-1}}_{\text{triangulaire supérieure (cf TD 1)}} \quad \text{d'après (1)}$$

[elle est bien inversible car les éléments de la diagonale sont $\neq 0$]

Donc $R_1 R_2^{-1}$ est triangulaire supérieure, ses vp sont ses éléments diagonaux.

donc $Q_1^* Q_2$ est semblable à $\begin{pmatrix} \pm 1 & & & (0) \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \pm 1 \end{pmatrix}$

car les diagonaux de $R_1 R_2^{-1}$ sont réels et de module 1

Si l'on requiert que tous les $(R_1)_{ii} > 0$ $(R_2)_{ii} > 0$, alors $Q_1^* Q_2$ est semblable à l'identité.

donc $Q_1^* Q_2 = I_p$.

(Seule l'identité est semblable à l'identité. Par contre, par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

donc $R_1 R_2^{-1} = I_p$

$\Longrightarrow R_1 = R_2$ puis $Q_1 = Q_2$

d'où l'unicité si l'on requiert des coefficients diagonaux positifs pour R.

3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Trouver le nombre d'opérations élémentaires.

3) D'après la question 2, il faut par orthonormaliser :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{II} \quad u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle q_j | v_k \rangle q_j & j<k \\ \mathrm{I} \quad q_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|} \end{array}\right.$$

pour $k = 1, \dots, p$.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$$

Nombre d'opérations pour les I

les q_k sont des vecteurs de taille n, donc il faut

$$\underbrace{2n-1}_{\text{pour trouver la norme}} + \underbrace{n}_{\text{division par un scalaire}} + \cancel{\underbrace{1}_{\text{prendre la racine carrée}}}$$

on oublie

$(3n-1)$ opérations.

On répète I p fois, donc $p(3n-1)$ op pour les normalisations des q_k.

Nombre d'opérations pour les II

$$\left\{\begin{array}{l} u_k := u_k - \langle q_1 | v_k \rangle q_1 \\ u_k := u_k - \langle q_2 | v_k \rangle q_2 \\ \vdots \\ u_k := u_k - \langle q_{k-1} | v_k \rangle q_{k-1} \end{array}\right. \quad k-1$$

produits scalaires : $2n-1$ pour chaque
produit scalaire vecteur n pour chaque
soustraction de deux vecteurs : n pour chaque

$(*)$

On répète $(*)$ $(k-1)$ fois

A l'étape k, on a $(k-1)(2n-1+n+n) = (k-1)(4n-1)$ opérations.

Au final, on a

$$\underbrace{p(3n-1)}_{\text{les (I)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p}(k-1)(4n-1)}_{\text{les (II)}}$$

soit $p(3n-1) + (4n-1)\sum_{k=1}^{p}(k-1) = p(3n-1) + (4n-1)\dfrac{p(p-1)}{2}$

ce qui est le résultat demandé.

si $p = n$ $\sim 2n^3$ opérations.

Inconvénient de cet algorithme : non stable numériquement.
car division par $\|u_k\|$ qui peut être très petit.

$\boxed{\text{Exo 8}}$ Jacobi et Gauss-Seidel. (convergence)

sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Rappel : Jacobi et Gauss-Seidel

$$A = \underbrace{D}_{\text{diagonale}} - \underbrace{E}_{\substack{\text{triang}\\ \text{inf stricte}}} - \underbrace{F}_{\substack{\text{triang}\\ \text{supérieure stricte}}}$$

$D = \begin{pmatrix} \ddots & (0) \\ (0) & \ddots \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 0 & (0) \\ \triangle & 0 \end{pmatrix}$

$F = \begin{pmatrix} 0 & \blacktriangle \\ (0) & 0 \end{pmatrix}$

But : résoudre $Ax = y$

$\boxed{\text{Par Jacobi}}$: On écrit $A = D - (E+F)$

$$Ax = y$$
$$Dx = (E+F)x + y$$
$$x = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{J}x + D^{-1}y$$

Méthode itérative : $x_0 \in \mathbb{R}^3$ donné, et l'on espère que la suite $x_{k+1} = Jx_k + D^{-1}y$ converge.

Si elle converge, c'est vers le point fixe, qui est la solution recherchée.

Cours : $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge $\forall x_0$ ssi $\rho(J) < 1$.

$\boxed{\text{Par Gauss-Seidel}}$ $A = (D-E) - F$

$$x = \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{G} + (D-E)^{-1}y$$

même critère : convergence $\forall x_0$ ssi $\rho(G) < 1$.

- En pratique sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Jacobi $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad E+F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$J = D^{-1}(E+F)$

$= E+F$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Cherchons les vp.

$$\det(J - xI_3) = \begin{vmatrix} -x & -2 & 2 \\ -1 & -x & -1 \\ -2 & -2 & -x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & 2 \\ -1 & -x-1 & -1 \\ -2 & -x-2 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -x-2 & -x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -x-1 \\ -2 & -x-2 \end{vmatrix}$$

$$= -x \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ x+2 & x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ 2 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= -x\left((x+1)x - (x+2)\right) + 2\left(x+2-2x-2\right)$$

$$= -x\left(x^2-2\right) + 2(-x)$$

$$= -x\left(x^2-2+2\right)$$

$$= x^3$$

Toutes les vp sont nulles donc $\rho(J) = 0$

donc converge !

<u>Pour Gauss - Seidel</u>

$$G = (D-E)^{-1} F$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D-E)^{-1} = (I_3 - E)^{-1}$$

Et l'on remarque que E est nilpotente

$$E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} E^k$$

$$= I_3 + E + E^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Autre méthode : inverse par pivot de Gauss.

$$G = (I_3 - E)^{-1} F$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_G(x) = \begin{vmatrix} -x & -2 & 2 \\ 0 & 2-x & -3 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$ triangulaire supérieure.

$$= -x(2-x)^2$$

vp sont 0 et 2, donc $\rho(G) = 2 > 1$

donc G-S ne converge pas.

- $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = D - E - F$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Par Jacobi :</u> $J = D^{-1}(E+F)$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = \begin{vmatrix} -x & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -x & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1/2-x & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -x & -1 \\ -1/2+x & 1/2 & -x \end{vmatrix} \quad C_1 \to C_1 - C_3$$

$$= (1/2 - x)\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1/2 & -x \end{vmatrix} + (1/2+x)\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1/2 - x)(x^2 + 1/2) + (1/2 + x)(-1/2 - x/2)$$

$$= (1/2 - x)(x^2 + 1/2) - (1/2 + x)\frac{1+x}{2}$$

$$= -x^3 + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \left(\cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -x^3 - x - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= -x^3 - \frac{5x}{4}$$

$$= -x\left(x^2 + \frac{5}{4}\right)$$

Les vp sont 0 et $\frac{\pm i\sqrt{5}}{2}$

donc $\rho(J) = \max_i |\lambda_i|$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

donc Jacobi ne converge pas.

Par G-S : $G = (D-E)^{-1}F$

$$D - E = 2I_3 - E$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = 0.$$

$$(D-E)^{-1} = (2I_3 - E)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_3 - \frac{E}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_3 + \frac{E}{2} + \frac{E^2}{4} + 0 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Et $(D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les éléments diagonaux (car cette matrice est triang sup) donc $\rho(G) = 1/2 < 1$.

donc Gauss-Seidel converge.

Résumé : Pour A : J converge
GS converge pas

Pour B : J converge pas
G-S converge

La méthode converge si la suite définie page 18 converge $\forall$ condition initiale x_0

Aucun lien entre les convergences respectives des méthodes de J et G-S.

Exo 7 Décomposition QR par Householder

$n \in \mathbb{N}^*$ u vecteur de $\mathbb{R}^n$ (colonne)

$\|u\|^2 = u^T u$

$u u^T$ (matrice)

1) On pose $H(u) = \begin{cases} I_n - 2\dfrac{uu^T}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ I_n & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $H(u)$ est symétrique et orthogonale.

a) si $u = 0$ $H(u) = I_n$ qui clairement sym et orthog.

supposons $u \neq 0$.

$$H(u)^T = \left(I_n - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)^T$$

$$= I_n - 2\frac{(uu^T)^T}{\|u\|^2}$$

$$= I_n - 2\,\frac{((u^T)^T u^T)}{\|u\|^2}$$

$$= I_n - 2\,\frac{uu^T}{\|u\|^2}$$

$$= H(u)$$

donc $H(u)$ est symétrique.

- $H(u)^T H(u) = H(u) . H(u)$ (car symétrique)

$$= \left(I_n - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)\left(I_n - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)$$

$$= I_n - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} - \frac{2uu^T}{\|u\|^2} + 4\,\frac{u\overbrace{u^Tu}^{\|u\|^2}u^T}{\|u\|^4}$$

$$= I_n - \frac{4uu^T}{\|u\|^2} + \frac{4uu^T}{\|u\|^2}$$

$$= I_n$$

(ou bien : binome de Newton $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ car A et B commutent).

<u>Rq</u> : $H(u)$ symétrique, $H(u)$ orthogonale $\Rightarrow$ $H(u)$ est son propre inverse. $H(u)^2 = I_n$

$$H(u)^{-1} = H(u)$$

<u>Dessin</u> : Soit x un vecteur :

$$H(u)x = \left(I_n - \frac{2uu^T}{\|u\|^2}\right)x$$

$$= x - \frac{2u\,u^Tx}{\|u\|^2}$$

$$= x - 2\frac{\langle u|x\rangle u}{\|u\|^2}$$

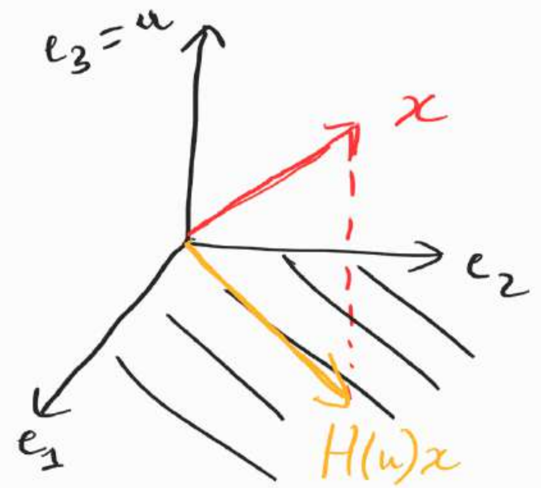
Exemple : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \langle u|x\rangle = x_3$

$n = 3$

$$H(u)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2x_3}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$



en général : $H(u)$ est la symétrie orthog par rapport à l'hyperplan $u^\perp$

(ici, $u = e_3$ $\quad u^\perp = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$)

(b) Soit e vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, non colinéaire à v.

Montrer $H(v + \|v\| e) v = -\|v\| e$

et $H(v - \|v\| e) v = + \|v\| e$

(b) $$H(\underbrace{v + \|v\|e}_{\neq 0})v = v - \frac{2(v + \|v\|e)(v + \|v\|e)^T}{\|v + \|v\|e\|^2} v$$

scalaire

$u^T u = \langle u|u\rangle = \|u\|^2$

$$= v - \frac{2(v + \|v\|e)(v^T + \|v\| e^T) v}{(v^T + \|v\|e^T)(v + \|v\|e)}$$

scalaire

$$= v - \frac{2(v+\|v\|e)\left(\|v\|^2+\|v\|\langle e|v\rangle\right)}{\|v\|^2+\|v\|v^Te+\|v\|e^Tv+\|v\|^2\|e\|^2}$$

On travaille dans $\mathbb{R}$, $v^Te = \langle v|e\rangle$
$= \langle e|v\rangle$
$= e^Tv$.

De plus e est unitaire (énoncé), donc $\|e\| = 1$.

$$= v - \frac{2(v+\|v\|e)\left(\|v\|^2+\|v\|\langle e|v\rangle\right)}{2\|v\|^2+2\|v\|\langle e|v\rangle}$$

$$= v - (v+\|v\|e)$$

$$= -\|v\|e$$

Donc $H(v+\|v\|e)v = -\|v\|e$

De même, le vecteur $-e$ est unitaire, donc on obtient

$H(v-\|v\|e)v = \|v\|e$

2) (a) et (b) sont du cours (cf Algorithme de Householder pour QR)

3) Déterminer une décomposition QR de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

via Householder.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On cherche $A = Q . \underset{\text{triang sup.}}{R}$

↳ on cherche à transformer en $\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On prend la base canonique $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pose $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_1 = v_1 - \|v_1\| e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'après la question précédente, $H(u_1) v_1 = +\|v_1\| e_1$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; (*)$$

ce qui est de la forme recherchée.

$$H(u_1) = I_3 - 2 \frac{u_1 u_1^T}{\|u_1\|^2}$$

$\|u_1\|^2 = 2$

$u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $H_1 = H(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $H_1 . A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comme précédemment cf ($*$)

on recommence avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (de taille $3-1=2$ maintenant)

$$\|v_2\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

On pose $u_2 = v_2 - \|v_2\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → le "nouveau e_1"

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a d'après la q. précédente

$$H(u_2)\, v_2 = \|v_2\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\square)$$

$$H(u_2) = I_2 - 2 \frac{u_2 u_2^T}{\|u_2\|^2}$$

$$\|u_2\|^2 = (1-\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1$$

$$= 4 - 2\sqrt{2}$$

$$u_2 u_2^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4-2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(car Householder)

- <u>Petite astuce</u> $H(u_2)$ est symétrique orthogonale, de la forme

(pas besoin de finir le calcul dans ce cas particulier)

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0$$

On normalise $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ dont la norme est $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

$$\longrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

De même si on normalise $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

donc $H(u_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- <u>Sans l'astuce</u> : $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

(plus sûr)

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4-2}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\frac{1}{2-\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1) = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}-1)$

$$= \sqrt{2} - 1 + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

donc de même $H(u_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$H(u_2)\, A_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

↳ Comme prévu cf (□)

On pose $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{H(u_2)} \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et on a $H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = R$ (triang. sup)

$$\Rightarrow \quad H_2 H_1 A = R$$

$$\Rightarrow \quad A = (H_2 H_1)^{-1} R$$

$$= H_1^{-1} H_2^{-1} R$$

$$= \underbrace{H_1 H_2}_{Q} R$$

(car les H_i sont leurs propres inverses)

$$Q = H_1 H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

orthogonale

<u>Rq</u>: Pour des matrices de plus grande taille

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{H(u_1)}{\underset{\parallel}{H_1}} A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H(u_2) & \\ 0 & & \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{H_2}} H_1 A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H(u_3) & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{H_3}} H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

<u>Chez vous</u> : Montrer en utilisant des transformations de Householder que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire une décomposition QR au sens de l'ex 6.

Comptage des multiplications (plus difficile, non fait en TD)

A l'étape k (k va de 1 à $n-1$), il faut évaluer

- $u_k = v_k - \|v_k\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Il faut calculer $\|v_k\|$, soit $n-k+1$ multiplications (v_k de taille $n-k+1$). Pas d'autres multiplications.
- $\|u_k\|^2$: $n-k+1$ (idem)
- $H(u_k) v = v - 2 \dfrac{\langle v | u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k$

pour $(n-k+1)$ vecteurs v.

Pour chaque vecteur v, calculer $H(u_k)v$ nécessite

$$\left.\begin{array}{ll}
* \text{ produit scalaire } \langle v | u_k \rangle & : n-k+1 \\
* \ \|u_k\|^2 \text{ déjà précalculé} & : 0 \\
* \ 1 \text{ division} = 1 \text{ multiplication} & : 1 \\
* \ 1 \text{ multiplication (par 2)} & : 1 \\
* \text{ produit scalaire} \times \text{vecteur} & : n-k+1
\end{array}\right\}$$

Soit M le nombre de multiplications. On a

$$M = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n-k+1)}_{\|v_k\|} + \underbrace{(n-k+1)}_{\|u_k\|^2} + \underbrace{(n-k+1)}_{\substack{\text{pour } n-k+1 \\ \text{vecteurs } v}} \underbrace{(n-k+1+1+1+n-k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)\left(4 + 2(n-k+1)\right) \qquad (q = n-k+1)$$

$$= \sum_{q=2}^{n} 2q(q+2)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{q=2}^{n} 2q^2 \sim \frac{2n^3}{3}.$$