Feuille 6 — Compléments

Exo 1 — Matrices à diagonale dominante.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diag. dom si

$$|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

1) Montrer que A inversible

1) D'après l'exo 4 fiche 5 (Gerschgorin), toute valeur propre est dans l'un des disques

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \right\}$$

Par l'absurde, supposons que 0 est valeur propre de A.

Alors, $\underset{\text{par Gerschgorin}}{\wedge}$ $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, $|A_{ii} - 0| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$

ce qui contredit l'hypothèse de diagonale dominante.

donc 0 n'est pas valeur propre

donc A inversible.

2) Soit J la matrice de Jacobi de A. Montrer $|||J|||_\infty < 1$ et en déduire que la méthode converge.

2) On écrit $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonale}}}{D} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangulaire} \\ \text{inf strict}}}{E} - \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{triangulaire} \\ \text{sup. strict.}}}{F}$

$$J = D^{-1}(E+F)$$ (D inversible car ses éléments sont $\neq 0$)

$$|||J|||_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exo 4} \\ \text{fiche 2}}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |J_{ij}| \quad (*)$$

Soient A_{ij} les éléments de matrice de A.

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = -\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ A_{21} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ A_{n1} & A_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = -\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & A_{n-1n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D^{-1})_{ii} = \frac{1}{A_{ii}} \quad , \quad E+F = -\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n-1n} \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -\dfrac{A_{ij}}{A_{ii}} & , \; i \neq j \end{cases}$$

D'après (*)

$$|||J|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |J_{ij}|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|A_{ij}|}{|A_{ii}|} \quad (\text{car } J_{ii} = 0)$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|A_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}|$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \frac{1}{|A_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}| < 1 \quad (\text{car diag-dom.}).$$

donc $|||J|||_\infty < 1$.

- D'après le cours, pour toute norme subordonnée, $\rho(J) \leq |||J|||$.

donc $\rho(J) \leq |||J|||_\infty < 1$, donc $\rho(J) < 1$ donc la méthode converge

- On peut aussi conclure directement de $|||J|||_\infty < 1$ (même thm du cours)

3) Montrer que si λ est valeur propre de la matrice de Gauss-Seidel G, alors

0 est valeur propre de
$$M = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \cdots & & \lambda A_{nn} \end{pmatrix}$$

En déduire $|\lambda| < 1$ et G-S converge

3) $A = D - E - F$

$$G = (D-E)^{-1} F$$

- $D-E$ est bien inversible car $D-E$ est aussi à diag. dom.

En effet $|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}| \geqslant \sum_{j<i} |A_{ij}|$

donc $|(D-E)_{ii}| > \sum_{j<i} |A_{ij}| = \sum_{j \neq i} |(D-E)_{ij}|$

donc G est bien définie.

- <u>Autre argument</u> $\det(D-E) = \det D$ car $D-E$ triangulaire inférieure.

et D inversible, donc $\det D = \det(D-E) \neq 0$.

Soit λ une valeur propre de G et x le vecteur propre associé.

$$Gx = \lambda x$$

donc $(D-E)^{-1} F x = \lambda x$

On multiplie par $D-E$ des deux côtés.

$$Fx = \lambda (D-E) x$$

$$\Rightarrow (\lambda D - \lambda E - F) x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda A_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

("plus de λ pour $j > i$")

donc $Mx = 0$

Au final, si λ est valeur propre de G, alors 0 est valeur propre de M.

- Par l'absurde supposons $|\lambda| \geq 1$.

* Pour comprendre, faisons d'abord le cas $\lambda = 1$, plus simple.

  Alors $M = A$ est à diagonale dominante, donc inversible (question 1)

  contradiction avec 0 valeur propre de M.

* Montrons maintenant que M est à diagonale dominante $\forall |\lambda| \geq 1$.

Partons de A. A est à diag. dom.

$$|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$$

$$|A_{ii}| > \sum_{j<i} |A_{ij}| + \sum_{j>i} |A_{ij}|$$

$$|\lambda|\,|A_{ii}| > \sum_{j<i} |\lambda|\,|A_{ij}| + \sum_{j>i} |\lambda|\,|A_{ij}|$$

$$\underset{(\text{car } |\lambda| \geq 1)}{>} \underbrace{\sum_{j<i} |\lambda|\,|A_{ij}| + \sum_{j>i} |A_{ij}|}_{\sum_{j \neq i} |M_{ij}|}$$

donc $|\lambda| |A_{ii}| = |M_{ii}| > \sum_{j \neq i} |M_{ij}|$

donc M est à diag dom

donc M inversible

Contradiction avec 0 valeur propre de M.

donc $|\lambda| < 1$ et donc G-S converge.

$\boxed{\text{Exo 2}}$ Méthode de la puissance.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, (u_i) base de vecteurs propres.

$A u_i = \lambda_i u_i$

$\underbrace{\lambda_1 = \cdots = \lambda_p}_{\text{la plus grande valeur propre en module a multiplicité } p}$ et $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ pour $i \in \{p+1, \dots, n\}$

1) $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Que vaut $\lim_{k \to \infty} \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k}$

1) $$A^k x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^k u_i$$

$$A^k x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k u_i \quad \text{(par récurrence immédiate)}$$

$$\frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k u_i$$

. Si $i \in \{1, \dots, p\}$ $\quad \frac{\lambda_i}{\lambda_1} = 1$.

. Si $i \in \{p+1, \dots, n\}$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ par hypothèse

donc $\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0$ (suite géométrique de raison < 1 en module)

Donc $\lim_{k\to\infty} \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \quad \in \underset{\text{sous-espace propre associé à la valeur propre } \lambda_1.}{\underset{\parallel}{\mathrm{vect}(u_1, \dots, u_p)}}$

On note $U = \left\{ x_0, \lim \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} \neq 0 \right\}$

Montrer U ouvert dense de $\mathbb{C}$.

$\lim \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$. Donc cette limite est non nulle ssi $\exists i \in \{1, \dots, p\} \,/\, \alpha_i \neq 0$.

$$U = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \exists i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i \neq 0 \right\}$$

<u>Montrons U ouvert</u> : Soit $x \in U$, $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Soit $i_0 \in \{1, \dots, d\}$, $x_{i_0} \neq 0$.

On vérifie facilement que la boule de centre x et de rayon $\frac{|x_{i_0}|}{2}$ appartient à U.

Donc le voisinage de x appartient à U, et U est ouvert

<u>Densité de U dans $\mathbb{C}^n$</u> : Soit $x \in \mathbb{C}^n$, $x \notin U$.

Alors $x = (0, 0, \dots, 0, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n)$ et $x = \lim_{k\to\infty} y_k$

avec $y_k = \left(\frac{1}{k}, 0, \dots, 0, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n\right)$ et $y_k \in U$.

2) $d(y,z) = \inf_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|y - e^{i\theta} z\|_2$, $\|y\|_2 = \|z\|_2 = 1$

Soit $x_0 \in U$ et (x_k) la suite

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}$$

Montrer $\exists\, x_\infty$ unitaire t.q $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_\infty) = 0$

2) $x_k = \dfrac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}$

$$x_k = \frac{\frac{A^k x_0}{\lambda_1^k}}{\left\| \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} \right\|_2} \frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1|^k}$$

On pose $\tilde{x}_k = \dfrac{\frac{A^k x_0}{\lambda_1^k}}{\left\| \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} \right\|_2}$

D'après la question précédente $\tilde{x}_k$ converge lorsque $k \to \infty$.

Posons $x_\infty = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k$

Alors $d(x_k, x_\infty) = d(\tilde{x}_k, x_\infty)$ car $\dfrac{\lambda_1^k}{|\lambda_1|^k}$ a module 1.

On montre facilement que d est continue

et $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x_\infty) = 0$.

Aussi, $\tilde{x}_k$ est trivialement unitaire, donc x_∞ aussi

Montrer que x_∞ est vecteur propre de valeur propre λ_1.

En utilisant la question 1, il vient

$$x_\infty = \frac{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i}{\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\|_2}$$

et $Ax_\infty = \lambda_1 x_\infty$ (car $Au_i = \lambda_1 u_i \ \forall i \in \{1, \dots, p\}$)

Montrer que $\lambda_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \langle Ax_k | x_k \rangle$

$$\langle Ax_k | x_k \rangle = \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k \overline{\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)}^k \langle A\tilde{x}_k | \tilde{x}_k \rangle$$

$$= \langle A\tilde{x}_k | \tilde{x}_k \rangle$$

Par continuité du produit scalaire et du produit matrice vecteur,

$$\lim_{k\to\infty} \langle Ax_k | x_k \rangle = \langle Ax_\infty | x_\infty \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle x_\infty | x_\infty \rangle$$ (on prend le produit scalaire linéaire à gauche)

$$= \lambda_1$$

3) Comment adapter l'algorithme précédent par trouver la valeur propre de plus petit module ?

3) On suppose A inversible

Alors A^{-1} a pour valeurs propres $(1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n)$

donc la plus grande valeur propre de A^{-1} est $1/\lambda_{min}$, où λ_{min} est la plus petite valeur propre de A.

Ainsi, il suffit d'appliquer la méthode de la puissance à A^{-1}.