Devoir à rendre le 13/3/12

Exercice 1 (exo 7 feuille III) *a) Soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par les changements de variables $t \mapsto t^{-1}$ et $t \mapsto 1-t$. Montrer que G laisse stable l'ensemble des 3 fonctions :*

$$f_1 := t + t^{-1},\ f_2 := 1 - t + (1-t)^{-1},\ f_3 := 1 - t^{-1} + (1-t^{-1})^{-1}\ .$$

En déduire que G est isomorphe au groupe S_3.

b) Soit K le sous-corps des fractions rationnelles $f \in \mathbb{C}(t)$ invariantes par les changements de variables

$$t \mapsto 1-t \text{ et } t \mapsto t^{-1}\ .$$

Montrer que $K = \mathbb{C}\left(\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}\right)$.

c) En déduire que l'extension :

$$\mathbb{C}\left(\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}\right) \subset \mathbb{C}(t)$$

est galoisienne de groupe de Galois S_3.

Exercice 2 (exo 5 feuille IV) *Le groupe S_n agit sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$ par permutations des coordonnées. On note $\sigma_1 := X_1 + ... + X_n, ..., \sigma_n = X_1 ... X_n$ les fonctions symétriques élémentaires.*

a) Montrer que $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)^{S_n} = \mathbb{C}(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

b) On pose $\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_i - X_j)$. Montrer que $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)^{A_n} = \mathbb{C}(\sigma_1, ..., \sigma_n, \Delta)$.

c) On pose $Y_k := X_1 + j^k X_2 + j^{2k} X_3 \in \mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)$ pour $k = 1, 2, 3$. Montrer que :

$$\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)^{A_3} = \mathbb{C}\left(\frac{Y_1^2}{Y_2}, \frac{Y_2^2}{Y_1}, Y_3\right)$$

(indication : $Y_1^3 = (Y_1^2/Y_2)^2\ Y_2^2/Y_1$ et $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3) = \mathbb{C}(Y_1^2/Y_2, Y_2^2/Y_1, Y_3, Y_1)$).