XII Exercices de révision

Exercice 1 Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n. on note K le corps de décomposition de f sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $n > 2$ et que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq S_n$.

a) Montrer que f est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que si a est une racine de f, alors le seul automorphisme du corps $\mathbb{Q}(a)$ est l'identité ;

c) Si $n \geq 4$, montrer que $a^n \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{Q}$. On suppose que le polynôme $f = x^4 + ax^2 + b$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note $\pm\alpha$, $\pm\beta$ ses racines et G son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$.

a) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de D_4, le groupe diédral d'ordre 8. En déduire que :

$$G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \text{ou } D_4\ .$$

b) Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha/\beta - \beta/\alpha \in \mathbb{Q}$.

c) Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}$.

d) Déterminer le groupe de Galois de $x^4 - 4x^2 - 1$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 Soit k un corps fini. On suppose que le polynôme :

$$X^3 + pX + q \in k[X]$$

est irréductible sur k. Montrer que $-4p^3 - 27q^2$ est un carré dans k.

Exercice 4 Soit k un corps fini à q éléments. Soit $n \geq 1$.

a) Montrer que si $f \in k[X]$ est irréductible de degré d, alors :

$$f | X^{q^n} - X \Leftrightarrow d | n\ .$$

b) Montrer que si I_d est l'ensemble des polynômes irréductibles sur k unitaires et de degré d, alors :

$$X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{f \in I_d} f\ .$$

c) En déduire que si N_d est le nombre de polynômes irréductibles sur k, de degré d et unitaires, alors :

$$nN_n = \sum_{d|n} \mu(d) q^{n/d}$$

où μ est la fonction de Möbius.

d) Montrer que :

$$\prod_p (1 - t^{\deg p})^{-1} = (1 - qt)^{-1}$$

où p décrit l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles sur k.

Exercice 5 Soit $a := \sqrt[4]{5}$.

a) Montrer que $\mathbb{Q}(ia^2)/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

b) Montrer que $\mathbb{Q}(a + ia)/\mathbb{Q}(ia^2)$ est galoisienne.

c) Montrer que $\mathbb{Q}(a + ia)/\mathbb{Q}$ n'est pas galoisienne.

Exercice 6 Soit f un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ qui possède au moins une racine réelle et une racine complexe non réelle. Montrer que le groupe de Galois de f sur $\mathbb{Q}$ n'est pas abélien.

Exercice 7 (Théorème fondamental de l'algèbre) L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos en admettant seulement que tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle et que tout réel positif admet une racine carrée (réelle).

a) Montrer que $\mathbb{C}$ n'a pas d'extension de degré 2.

b) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. Soit E son corps de décomposition sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{R})$ est un $2-$groupe (en considérant ses $2-$Sylow).

c) Si $\mathbb{C} \neq E$, montrer que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{C})$ contient un sous-groupe d'indice 2.

d) Conclure

Exercice 8 Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme

$$x^6 + 22x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 37x^2 - 29x - 15$$

(réduire modulo $2, 3, 5$*).*