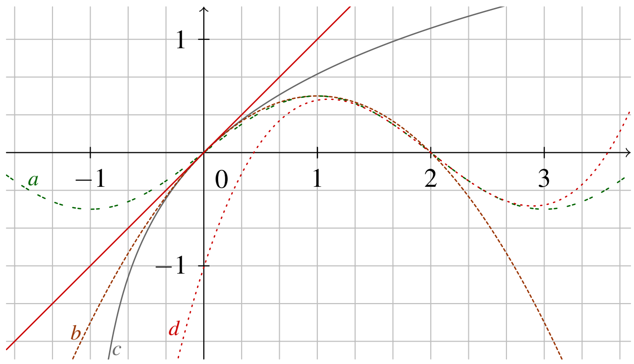
Correction Feuille 6 : Formules de Taylor.

Exercice 1

Dans les graphes des fonctions suivantes, identifier $x \mapsto \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et la partie polynomiale de leurs développements limités à des points et des ordres qu'on déterminera.



Pour identifier les courbes, on remarque que la courbe de la fonction a est périodique. De plus, quand on effectue un DL d'une fonction, obtient une approximation **polynômiale** de la fonction et ça n'est donc pas périodique. De plus, on sait que les courbes des DLs sont tangentes au point auquel on effectue le DL à la courbe de la fonction concernée. La courbe de la fonction a est donc celle de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$.
La courbe de la fonction c vaut 0 en 0 et semble aller de $-\infty$ en -1 et tendre vers $+\infty$ en ∞. C'est donc la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. La courbe de b est tangente en 0 à la courbe de la fonction c. C'est donc le développement limité de c en 0. Elle coupe deux fois l'axe des abscisses, ce qui signifie que le DL est au moins à l'ordre 2. Or on sait qu'en 0, on a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Or la courbe de b s'annule bien pour $x = 2$. Donc la fonction b est $x \mapsto x - \frac{x^2}{2}$, DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction c.
Enfin la courbe de la fonction d est tangente à celle de la fonction a en $x = 2$. Elle coupe l'axe des abscisses au moins 3 fois, ce qui signifie que c'est le DL de la fonction a pour $x = 2$ à l'ordre au moins 3. Or $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{(\pi(x-2))^2}{96} + o((x-2)^3)$. D'où la fonction d correspond à la fonction $x \mapsto -\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{(\pi(x-2))^2}{96}$.

Exercice 2

__**Méthode 1 avec la formule de Taylor-Lagrange**__ Soit f la fonction exponentielle qui est bien $\mathscr{C}^\infty$. On sait d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour $x = 1$, on peut se donner un $c \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \\ e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\exp(c)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

.

Or $\dfrac{\exp(c)}{(n+1)!} > 0$. De plus, par croissance de la fonction exponentielle, on sait que $1 < \exp(c) < e < 3$. Par conséquent pour $n \geq 2$, on sait que $\dfrac{e}{n+1} < 1$. D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

.

<u>Méthode 2 avec la formule de Taylor avec reste intégral</u>

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt$$
$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} e^t dt$$

.

Or une rapide étude de fonction de$x \mapsto e^x(1-x)^n$ nous permet de dire :

$$\forall t \in]0,1[, 0 < (x-t)^n e^t < 1$$

D'où :

$$0 < \int_0^1 \frac{(x-t)^n}{(n)!} e^t dt < \frac{1}{n!}$$

.

D'où le résultat.

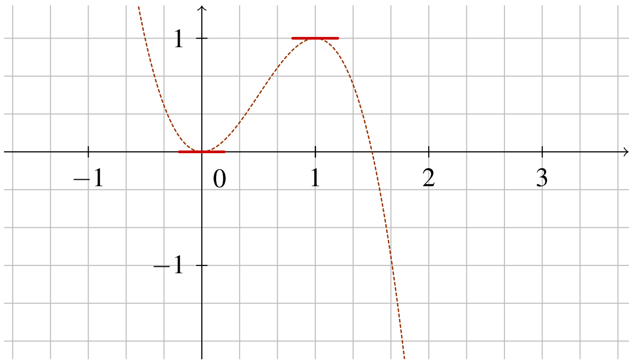
Pour montrer que e est irrationnel, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $(p,q)\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $e = \dfrac{p}{q}$. On a montré que :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < & e & < \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < & \dfrac{p}{q} & < \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < & p(q-1)! < & \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + 1 \end{array}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est entier et $p(q-1)!$ est donc un entier compris strictement entre deux entiers consécutifs d'où la contradiction. On a donc montré que $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Pour trouver une approximation à 10^{-4} près,il faut regarder pour quel entier n, on a $n! \geq 10^4$. On constate que $n = 8$ et donc $e \approx \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!}$.

Exercice 3



Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Un exemple de f a été dessiné ci-dessus pour la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x^3$. Comme on sait que f est de classe C^2, on va pouvoir utiliser les formules de Taylor.

Méthode 1 avec la formule de Taylor-Lagrange

Quand on lit l'énoncé, on peut se dire qu'intuitivement f admet deux extrema locaux en 0 et 1 et qu'il va falloir que f' varie fortement sur l'intervalle $]0,1[$ pour que f puisse varier de 0 à 1 tout en ayant une dérivée nulle en 1 (sinon on peut constater que sans la contrainte $f'(1) = 0$, la fonction $x \mapsto x^2$ satisfait les conditions et f'' est constante égale à 2).Or les formules de Taylor permettent d'exprimer la valeur de f en un point en fonction d'un autre. On va donc avoir besoin d'utiliser les conditions en 1 **et** en 0 en exprimant un point avec les deux formules. Comme les mathématiques aiment les ensembles égaux, on a tendance à choisir le point $x = \frac{1}{2}$, milieu de l'intervalle. Les formules de Taylor-Lagrange nous donnent l'existence de c_0, c_1 qui appartiennent respectivement à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tels que :

$$\begin{aligned} f(1/2) &= f(0) + \frac{1}{2} f''(c_0) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ f(1/2) &= f(1) + \frac{1}{2} f''(c_1) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(f''(c_0) - f''(c_1)) = && 1 \\ f''(c_0) - f''(c_1) = && 8 \end{aligned}$$

.

Or d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$8 = |f''(c_0) - f''(c_1)| \leq |f''(c_0)| + |f''(c_1)| \leq 2\max(|f''(c_0)|, |f''(c_1)|)$$

. D'où :

$$\max(|f''(c_0)|, |f''(c_1)|) \geq 4$$

. On a donc bien montré que f" n'est pas majorée par 4.

Méthode 2 avec la formule de Taylor avec reste intégral

De la même manière avec les formules de Taylor avec reste intégral au point $x = \frac{1}{2}$ en fonction de 0 et 1 donnent :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right) f''(t)dt = f(\frac{1}{2}) = 1 + \int_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right) f''(t)dt$$

On rappelle $\int_a^b = -\int_b^a$ et donc on a :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right) f''(t)dt = 1$$

. Or :

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right) f''(t)dt\right| \leq \max_{[0,1]}|f''| \int_0^1 \left|\frac{1}{2} - t\right| dt = \frac{\max\limits_{[0,1]}|f''|}{4}$$

.

En effet

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{2} - t\right| dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \left[\frac{-(\frac{1}{2} - t)^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(t - \frac{1}{2})^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4}$$

.

D'où $\max\limits_{[0,1]}|f''| \geq 4$.

<u>**Méthode 3 (pour celles et ceux qui n'aiment pas les formules de Lagrange)**</u>

On raisonne par l'absurde en supposant $|f''(x)| \leq 4 - \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ pour un $\varepsilon > 0$ donné. Alors pour tout $x \in [0,1]$

$$|f'(x)| \leq \int_0^x |f''(t)|dt \leq (4 - \varepsilon)x$$

et

$$|f'(x)| \leq \int_x^1 |f''(t)|dt \leq (4 - \varepsilon)(1 - x).$$

Ceci prouve $|f'(x)| \leq (4 - \varepsilon)\min(x, 1 - x)$. Alors

$$|f(1)| \leq \int_0^1 |f'(x)|dx \leq \int_0^{1/2} (4 - \varepsilon)xdx + \int_{1/2}^1 (4 - \varepsilon)(1 - x)dx = \frac{4 - \varepsilon}{4} < 1,$$

Exercice 4

La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à tout ordre sur l'intervalle $[0,x]$ (x est un nombre > 0 fixé). Faisons le à l'ordre n : il existe $c \in [0,x]$ tel que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0) + \frac{x^n}{n!} \cos^{(n)}(c).$$

D'où

$$|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0)| \leq \frac{x^n}{n!} |\cos^{(n)}(c)| \leq \frac{x^n}{n!}.$$

On veut trouver une valeur approchée de $\cos(\frac{\pi}{32})$ à 10^-5 près : l'idée est donc de prendre $x = \frac{\pi}{32}$ ci-dessus, et la valeur approchée sera la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0)$.

Á quel ordre faut-il aller ? Comme on veut à 10^-5 près, d'après la majoration ci-dessus, il faut choisir un ordre n tel que $\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{32}\right)^n \leq 10^{-5}$: par exemple ça marche pour $n = 5$.

Écrivons donc la formule de Taylor-Lagrange pour cos à l'ordre 5 : il existe $c \in [0,x]$ tel que

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(0) + x\cos'(0) + \frac{x^2}{2!}\cos''(0) + \frac{x^3}{3!}\cos^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\cos^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}\cos^{(5)}(c)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\sin(c)\end{aligned}$$

D'où finalement

$$|\cos\left(\frac{\pi}{32}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{32}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{32}\right)^4\right)| \leq 10^-5.$$

La valeur approchée cherchée est donc $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{32}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{32}\right)^4$.

Pour trouver la valeur exacte, on se sert de la formule $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Pour $\theta = \frac{\pi}{32}$, on a alors

$$\cos^2(\frac{\pi}{32}) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{16}\right).$$

De même, pour calculer $\cos(\frac{\pi}{16})$, on utilise cette formule :

$$\cos^2(\frac{\pi}{16}) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{16}\right), \text{ et de même} \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right).$$

Or $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc on remonte :

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos(\frac{\pi}{16}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad \cos(\frac{\pi}{32}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}.$$

Exercice 5

1) On applique la formule de Taylor-Lagrange au voisinage de 1 à l'ordre 2. On calcule les dérives successives de ln : $ln'(x) = \frac{1}{x}$, $ln^{(2)}(x) = \frac{-1}{x^2}$, $ln^{(3)}(x) = \frac{2x}{x^4}$.

$$ln(1+x) = ln(1) + xln'(1) + \frac{x^2}{2}ln^{(2)}(1) + \frac{x^2}{2}ln^{(3)}(1+\theta_x x), \theta_x \in]0,1[$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\frac{2(1+\theta_x x)}{(1+\theta_x x)^4}$$

On a de plus à l'ordre 1 :

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta_x x)^2}$$

2) On considère les restes pour $x > 0$: $\frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta_x x)^2}, \frac{x^3}{6}\frac{2(1+\theta_x x)}{(1+\theta_x x)^4} > 0$. On en déduit donc : $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$.

3) On a $(1+\frac{x}{n})^n = \exp(nln(1+\frac{x}{n}))$. On applique 2) pour $\frac{x}{n}$:

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} < ln(1+\frac{x}{n})) < \frac{x}{n}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{x^2}{2n} < nln(1+\frac{x}{n})) < x$$
$$\Leftrightarrow \exp(x-\frac{x^2}{2n}) < \exp(nln(1+\frac{x}{n}))) < \exp(x)$$
$$\Leftrightarrow \exp(x)\exp(\frac{x^2}{2n}) < ln(1+\frac{x}{n})) < \exp(x)$$

Or, $lim_{n\to\propto}\exp(x)\exp(\frac{x^2}{2n}) = \exp(x)$. Par le théorème des gendarmes, on obtient finalement, $lim_{n\to\propto}ln(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$.

4) Soit $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-1,\propto +[/0$. On cherche à prolonger par continuité la fonction en 0. On a $f(x) = \exp(\frac{1}{x}ln(1+x))$. On doit s'assurer que les limite en 0^+ et en 0^- coïncident mais les inégalités de la question 2) ne sont vraies que pour $x > 0$. On raisonne avec les DL en 0

$$\exp(\frac{1}{x}ln(1+x)) = \exp(\frac{1}{x}(x+o(x))) = \exp(1+o(1)) = \exp(1)\exp(o(1)) \to_{\to 0} \exp(1)$$

On pose $\hat{f}(0) = lim_{x\to 0}f(x) = \exp(1)$ et $\hat{f}(x) = f(x), x \neq 0$.

On calcule le DL à l'ordre 2 en 0 :

$$\exp(\frac{ln(1+x)}{x}) = \exp(\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))) = \exp(1-\frac{x}{2}+o(x))$$
$$= \exp(1)\exp(-\frac{x}{2}+o(x)) = \exp(1)(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)) = \exp(1)-\frac{\exp(1)x}{2}+\frac{\exp(1)x^2}{8}+o(x^2)$$

Exercice 6

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1+x+x^2+x^3$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut écrire la formule de Taylor-Young pour f au point 1 à tout ordre. On la veut à l'ordre 4 :

$$f(x) \underset{1}{=} f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4+(x-1)^4\varepsilon(x-1)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. Calculons les dérivées :

$$f'(x) = 1+2x+3x^2, \quad f''(x) = 2+6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(k)}(x) = 0\forall k \geq 4.$$

Donc $f'(1) = 6$, $f''(1) = 8$, $f^{(3)}(1) = 6$ et $f^{(4)}(1) = 0$ et on obtient la formule

$$f(x) \underset{1}{=} 4+6(x-1)+4(x-1)^2+(x-1)^3+(x-1)^4\varepsilon(x-1).$$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$. De même, cette fonction est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Écrivons la formule de Taylor-Young au point 0 à l'ordre 4. Pour cela, on calcule les 4 premières dérivées en 0 :

$$\cos'(0) = -\sin(0) = 0,\ \cos''(0) = -\cos(0) = -1,\ \cos^{(3)}(0) = \sin(0) = 0,\ \cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1.$$

On obtient donc

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x),$$

où ε tend vers 0 quand x tend vers 0.

Pour $x > 0$, on a envie de dire que le terme $\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)$ sera du signe de $\frac{x^4}{24}$, donc positif, et que donc $\cos(x) == 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x) > 1-\frac{x^2}{2}$. Cependant, ce n'est pas très rigoureux et pour ce genre de majoration il vaut mieux utiliser la formule de Taylor-Lagrange :

- à l'ordre 2 pour l'inégalité de gauche : il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\cos(c).$$

D'où on en déduit (puisque x est positif mais comme on a x^2 c'est aussi valable pour x négatif) que

$$|\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}|\cos(c)| \leq \frac{x^2}{2},$$

et donc $-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) - 1 \leq \frac{x^2}{2}$. On obtient ainsi la première inégalité.

- à l'ordre 4 pour l'inégalité de droite : il existe $d \in]0,x[$ tel que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos(d).$$

De même, on a alors

$$\left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^4}{24}, \text{ et donc} \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24},$$

ce qui donne l'inégalité voulue. C'est aussi encore valable si x est négatif puisqu'on a que des puissances de x paires : le signe de x n'importe donc pas dans les majorations.

3. On considère la fonction h définie par $h(x) = \exp(x)$. Cette fonction est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 4. On remarque que pour tout $k \geq 0$, on a $h^{(k)}(x) = (-1)^k h(x)$, d'où l'on en déduit que $h^{(k)}(0) = (-1)^k$, ainsi :

$$\exp(-x) \underset{1}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x),$$

où ε tend vers 0 quand x tend vers 0. De même, pour l'encadrement on utilise plutôt Taylor-Lagrange à l'ordre 3 : il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\exp(-c).$$

Puisque x est positif et $c > 0$, on a $\exp(-c) < 1$ et donc on obtient la majoration suivante :

$$\left|\exp(-x) - 1 + x - \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{6}\exp(-c) < \frac{x^3}{6}.$$

On obtient ainsi l'inégalité de droite. Par ailleurs, puisque $x > 0$, on a $\frac{x^3}{6}\exp(-c) > 0$ et donc on obtient bien que $\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\exp(-c) > 1 - x + \frac{x^2}{2}$. Si x est négatif, on peut montrer qu'on obtient les mêmes inégalités : il suffit de faire le même travail sur la fonction $x \mapsto \exp(x)$ pour x positif.

Exercice 7

On considère la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Commençons par calculer les premières dérivées de f : on a

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

C'est donc sous la bonne forme avec $P_1(X) = 2X^3$ Continuons à dériver : il faut maintenant dériver un produit :

$$f''(x) = \frac{-3}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{-6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right] e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

C'est aussi sous la bonne forme avec $P_2(X) = -6X^4 + 4X^6$. On peut continuer à dériver :

$$f^{(3)}(x) = \left[\frac{24}{x^5} - \frac{36}{x^7} + \frac{8}{x^9}\right] e^{-\frac{1}{x^2}},$$

et on trouve alors $P_3(X) = 24X^5 - 36X^7 + 8X^9$. Montrons maintenant le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Condidérons l'hypothèse de récurrence suivante : "il existe un poynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, c'est trivialement vérifié avec le polynôme $P_0 = 1$. On vient aussi de montrer le résultat vrai pour $n = 1, 2, 3$.

Hérédité : Supposons le résultat établi pour un certain rang $n \in N$, autrement dit on sait qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$. Dérivons ceci comme un produit :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left[-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Posons donc $P_{n+1}(X) = -X^2P_n'(X) + 2X^3P_n(X)$, il vérifie bien la propriété attendue et donc le résultat est montré par récurrence. (On peut vérifier que cette formule donne bien P_1, P_2 et P_3 à partir de P_0, P_1 et P_2.)

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche à calculer $\lim\limits_{x\to 0} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$. Si P est constant, alors cela revient à calculer $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui est 0. Sinon, on peut écrire P sous la forme $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, et alors

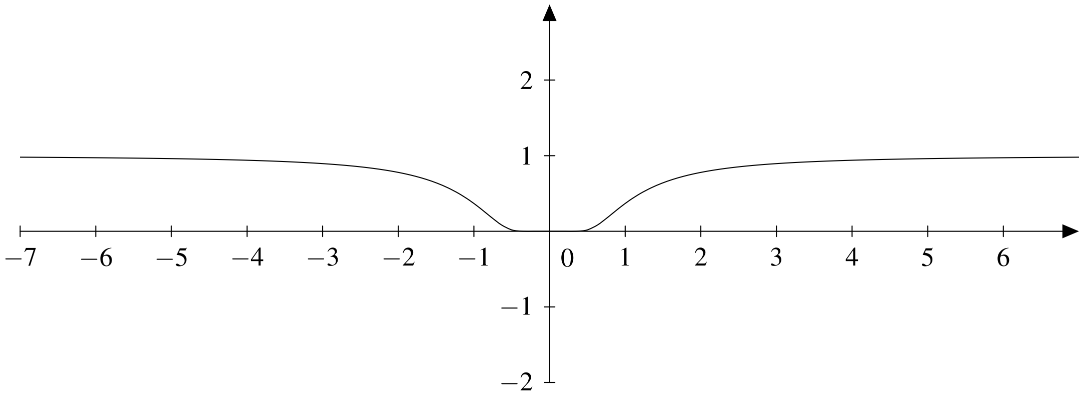
$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{x^n}$$

Par théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0$ pour $n \geq 1$, d'où on en déduit que la limite cherchée est 0.

3. On sait que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de 2 fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. D'après les questions **1**. et **2**., on peut prolonger toutes les dérivées de f par continuité en 0, en posant la valeur limite qui est 0 par **2**.. Ainsi, la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à tout ordre. Comme toutes les dérivées de f en 0 valent alors 0, il ne reste que le dernier terme dans la formule de Taylor-Lagrange : il existe $c_x \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c_x).$$

Graphe de la fonction :



Exercice 8

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $g = \sqrt{f}$.

1) Supposons $f(a) \neq 0$. En appliquant, la formule pour la dérivée d'une composée ;on aurait $\sqrt{f}' = \frac{1}{2\sqrt{f}} f'$ et $\sqrt{f}'' = \frac{-f'}{4\sqrt[3]{f}} + \frac{f''}{2\sqrt{f}}$. Comme f est de classe C^2 en a et $f(a) \neq 0$, g' et g'' sont bien définies en a, de plus, elles sont continues par compositions fonctions continues donc g est de classe C^2 en a.

2) f est à valeurs positives donc si f s'annule en $a \in \mathbb{R}$, la fonction atteint un minimum (local et même global) en ce point. Par conséquent, $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On fait un développement limité au voisinage de a. Pour un réel $h \in \mathbb{R}$, on a donc $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h^2 f''(a) + o(h^2) = h^2 f''(a) + o(h^2)$. On applique la formule théorique pour les limites, g est dérivable en a si la limite suivante est un réel bien défini (on factorise par h^2 puis on considère $\sqrt{h^2} = |h|$) :

$$lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{f(a+h)} - \sqrt{f(a)}}{h} = lim_{h \to 0} \frac{|h|(\sqrt{f''(a) + o(1)}}{h}$$

Supposons $f''(a) = 0$, alors $lim_{h\to 0} \frac{|h|(\sqrt{f''(a)+o(1)}}{h} = lim_{h\to 0} \frac{|h|\sqrt{o(1)}}{h}$ Mais $lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ et $lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$, de plus, $lim_{h\to 0}\sqrt{o(1)} = 0$. Par conséquent, $lim_{h\to 0} \frac{|h|\sqrt{o(1)}}{h} = 0$. La fonction g est donc dérivable en a.

Réciproquement, supposons $f''(a) \neq 0$, alors $lim_{h\to 0} \frac{|h|(\sqrt{f''(a)+o(1)}}{h}$ n'est pas définie. En effet, $lim_{h\to 0^+} \frac{|h|(\sqrt{f''(}{}$ $\sqrt{f''(a)}$ et $lim_{h\to 0^-} \frac{|h|(\sqrt{f''(a)+o(1)}}{h} = -\sqrt{f''(a)}$, les limites en 0^+ et en 0^- ne coïncident pas. La fonction g n'est pas dérivable en a.

Exercice 9

Etudions la fonction $g : u \mapsto \frac{2M_0}{u} + \frac{uM_2}{2}$.
g est dérivable sur R_+^* de dérivée :

$$g'(u) = -\frac{2M_0}{u^2} + \frac{M_2}{2}$$

Calculons les zéros de la fonction g' :

$$\begin{aligned}
& g'(u) = 0 \\
\iff & \frac{2M_0}{u^2} = \frac{M_2}{2} \\
\iff & u^2 = \frac{4M_0}{M_2} \\
\iff & u = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \qquad \text{car } u \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi g' s'annule en $u_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ et sur $]0, u_0]$, g' est négative et sur $[u_0, +\infty[$, g' est positive.
Par conséquent g est décroissante sur $]0, u_0]$ et croissante sur $[u_0, +\infty[$ en atteignant son minimum global en u_0 de valeur $g(u_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$.

On suppose que f est bornée par M_0 et que f'' est bornée par M_2 et nous voulons montrer que f' est bornée par $M_1 = 2\sqrt{M_0 M_2}$.
Ecrivons la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+u$, avec $u > 0$. Il existe $c \in [x, x+u]$ tel que :

$$f(x+u) = f(x) + f'(x)u + f''(c)\frac{u^2}{2} \iff f'(x) = \frac{f(x+u) - f(x)}{u} - \frac{f''(c)u}{2}$$

Prenons la norme et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|f'(x)| = \left| \frac{f(x+u) - f(x)}{u} - \frac{f''(c)u}{2} \right| \leq \frac{|f(x+u)| + |f(x)|}{u} + \frac{|f''(c)|u}{2} \leq \frac{2M_0}{u} + \frac{uM_2}{2} = g(u)$$

Donc nous avons $|f'(x)| \leq g(u)$, qui est valable pour tout $u > 0$. En particulier c'est valable pour $u = u_0$ et donc :

$$|f'(x)| \leq g(u_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$$