Exercice 1 *à l'ordre* 3 *en* 0 $\frac{\sqrt{1-x}}{1+x+x^2+x^3+x^4}$, $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

Exercice 2 *Trouver* $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}$.

Exemple :

$$\sin x \mathrm{ch} x - \cos x \mathrm{sh} x = 2x^3/3 + o(x^4),\ \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{shx} = \frac{x}{3} + o(x)$$

5.2.1 Intégration des d. l.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, si f' a un d.l. en x_0 d'ordre n :

$$f'(x) = a_0 + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$(n \geq 0)$ alors f a un d.l. à l'ordre $n + 1$ en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + ... + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}) \ .$$

Démonstration : D'après la règle de l'Hospital,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - a_0(x - x_0) - .... - \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - a_0 - ... - a_n(x - x_0)^n}{(n + 1)(x - x_0)^n}$$

si cette limite existe. Or cette limite existe et vaut 0. *q.e.d.*

5.2.2 Dérivation des d.l.

Théorème 5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application qui a un d.l; d'ordre n x_0 avec $n \geq 1$:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)\,,$$

si f' a un d.l. à l'ordre $n - 1$ en x_0, alors :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + na_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) \ .$$

Démonstration : On utilise le théorème précédent et l'unicité du d.l. <u>*q.e.d.*</u>

Application : $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$; $\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1.3.....(2k-1)}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$.

Exercice 3 *Développer* $e^{\sin x}$ *à l'ordre* 3 *en* 0. *Développer* $\ln(\cos x)$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

Théorème 5.2 *Soit I un intervalle ouvert contenant* 0. *Soit J un intervalle ouvert. Soient $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ telles que $g(I) \subseteq J$. On suppose que f a un développement à l'ordre n en $g(0)$, que g a un développement à l'ordre n en 0 :*

$$g = g(0) + Q_n + o(x^n)$$

$$f(g(0) + x) = P_n + o(x^n)$$

où P_n, Q_n sont des polynômes de degrés $\leq n$ et $X|P_n$, alors $f \circ g$ a un développement limité à l'ordre n en 0 et :

$$f \circ g(x) = R_n + o(x^n)$$

où $P_n \circ Q_n = R_n \bmod X^{n+1}$ (R_n est le reste de la division euclidienne de $P_n \circ Q_n$ par X^{n+1}).

Exercice 4 *d.l. à l'ordre* 4 *en* 0 *de* $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\text{sh} x}$.

5.3 D.l. ailleurs qu'en 0

Exemples :

a) $e^x = e^{2+(x-2)} = e^2(1 + (x-2) + (x-2)^2/2 + (x-2)^3/6 + o((x-2)^3)) =$
$e^2 + e^2(x-2) + e^2(x-2)^2/2 + e^2(x-2)^3/6 + o((x-2)^3)$;

$$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln(1 + (x-1))}{(1 + (x-1))^2} = \frac{(x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + o((x-1)^4)}{1 + 2(x-1) + (x-1)^2}$$

$$= ((x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + o((x-1)^4)$$
$$(1 - [2(x-1) + (x-1)^2] + [2(x-1) + (x-1)^2]^2 - [2(x-1) + (x-1)^2]^3 + o((x-1)^3)$$
$$= ((x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + o((x-1)^4))$$
$$(1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + o((x-1)^3))$$
$$= (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4) \ .$$

Développements asyptotiques (ou d.l. à l'∞)

Exemple : « au voisinage de l'∞ » ,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{48x^3}-1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{48x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}+o(\frac{1}{x^2\sqrt{x}})\ .$$

6 Applications

Exercice 5 *$n! \sim n\ln n$ Indication : $n! \leq n^n$ et $e^n \geq \frac{n^n}{n!}$*

Théorème 6.1

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Lemme 6.2 *soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.*

Démonstration : Si $\boldsymbol{\alpha \leq 1}$, alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Or la suite croissante définie par $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ n'est pas bornée car sinon elle convergerait ce qui est impossible vu que :

$$H_{2n}-H_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\not\to 0\ .$$

Si $\boldsymbol{\alpha > 1}$, on a :

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}=\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}-1)$$

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}(\frac{\alpha-1}{n}+o(\frac{1}{n})$$

$$\sim\frac{(\alpha-1)}{n^\alpha}\ .$$

Donc il existe une constante K telle que

$$\forall n,\ \frac{1}{n^\alpha} \leq K\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}\right)\ .$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq K\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \leq K\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leq K$$

on a donc une suite qui converge car croissante et majorée. *q.e.d.*