Exercice : résoudre : $y'' + y = \tan^2 x$.

3 Équations différentielles linéaires d'ordre quelconque

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 1 *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A : I \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $x \mapsto A(x) = (a_{ij}(x))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ une application. on dit que A est continue, dérivable, $k-$fois dérivable, $\mathcal{C}^k$, etc si les mêmes propriétés sont vérifiées par tous les a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Si A est dérivable en $x \in I$, on note $A'(x) = (a'_{ij}(x))_{ij}$.*

Exercice 1 *Si $A : I \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ sont dérivables en $x_0 \in I$, alors AB aussi et :*

$$(AB)'(x_0) = A'(x_0)B(x_0) + A(x_0)B'(x_0) \ .$$

Théorème 3.1 *Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue. Soit $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ une application continue. Pour tout $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, l'équation*

$$Y' = A(x)Y + B(x),\ Y(x_0) = Y_0$$

a une unique solution $Y : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Remarque. Si $x_1, ..., x_n : [a; b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions ri, si $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, alors on pose $\int_a^b X(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b x_n(t)dt \end{pmatrix}$.

Lemme 3.2 *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = \max_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, on a :*

$$||AB|| \leq ||A||||B|| \ .$$

Lemme 3.3 *Soit (x_n) une suite réelle. Si la suite $(\sum_{k=0}^n |x_k|)_n$ est majorée, alors $\lim_n \sum_{k=0}^n x_k$ existe.*

Notation. On pose alors $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k$. *Démonstration :* On pose $x^+ = \max\{x, 0\}$ et $x^- = \max\{-x, 0\}$. On a bien entendu : $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k^+ - \sum_{k=0}^{n} x_k^-$$

Or les suites $(\sum_{k=0}^{n} x_k^+)_n$ et $\sum_{k=0}^{n} x_k^-$ sont croissantes et majorées par $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| = \sup\{\sum_{k=0}^{n} |x_k| \ : \ n \geq 0\}$. Donc elles convergent ... *q.e.d.*

Lemme 3.4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\frac{x^n}{n!}$ tend vers 0 et la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge.*

Démonstration : Posons $a_n = 2^n x^n / n!$. La suite $|a_n|/|a_{n-1}| = 2x/n$ tend vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $^{\forall} n \geq N$, $|a_n|/|a_{n-1}| \leq 1$.D'où :

$$^{\forall} n \geq N, \ |a_n| \leq |a_N|$$

$$\Rightarrow {}^{\forall} n \geq N, \ |x^n/n!| \leq \frac{|a_N|}{2^n} \ .$$

q.e.d.

Démonstration du théorème : **Unicité :**

Montrons que si $Y'(x) = A(x)Y(x)$ et $Y(x_0) = 0$, alors $Y = 0$.

On a :

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)Y(t)dt \ .$$

Soit $\delta > 0$ tel que $[x_0, x_0 + \delta] \subseteq I$. Soient $M = \sup_{[x_0, x_0+\delta]} |Y|$ et $||A|| = \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \delta} ||A(x)||$. On vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$||Y(x)|| \leq M \frac{||A||^n (x - x_0)^n}{n!} \longrightarrow_{n\infty} 0 \ .$$

Existence : On pose $Y_0(x) = Y_0$ et $Y_{k+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)Y_k(t) + B(t))dt$. Nous allons montrer que $Y_k(x)$ tend vers $Y(x)$ pour tout $x \in I$ et que la fonction Y obtenue est continue sur I.

Il suffit de le montrer pour tout segment $J \subseteq I$ qui contient x_0.

Soit J un segment contenu dans I et contenant x_0. Posons $M_J = \sup_J ||A(t)Y_0 + B(t)||$ et $||A||_J = \sup_J ||A(t)||$.

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

$$||Y_{k+1}(x) - Y_n(x)|| \leq M_J ||A||_J^n (x - x_0)^k / k!$$

pour tout $x \in J$.

Notons $y_{k1}, ..., y_{kn}$ les fonctions coordonnées de Y_k :

$$Y_k(x) = \begin{pmatrix} y_{k1}(x) \\ \vdots \\ y_{kn}(x) \end{pmatrix} .$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, pour tout $x \in J$, on a :

$$|y_{k+1i}(x) - y_{ki}(x)| \leq M_J ||A||_J \frac{|x - x_0|^k}{k!}$$

$$\leq M_J ||A||_J^k r_J^k / k!$$

où $r_J = \max_J |x - x_0|$.

Donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1i}(x) - y_{ki}(x)$ converge pour tout $x \in J$. On note $y_i(x) = y_{0i} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1i}(x) - y_{ki}(x)$. Il est clair que $\lim_{k\infty} y_{ki}(x) = y_i(x)$ pour tout $x \in J$.

On a de plus, pour tous $x, x' \in J$:

$$|y_i(x') - y_i(x)| \leq |y_i(x) - y_{Ki}(x)| + |y_{Ki}(x) - y_{Ki}(x')| + |y_{Ki}(x') - y_i(x')|$$

$$\leq 2M_J \sum_{k=K}^{\infty} ||A||_J^k r_J^k / k! + |y_{Ki}(x) - y_{Ki}(x')|$$

(pour tout K). Soit $\epsilon > 0$. Soit K tel que :

$$M_J \sum_{k=K}^{\infty} ||A||_J^k r_J^k / k! \leq \epsilon$$

(un tel ϵ existe car $\sum_{k=K}^{\infty} ||A||_J^k r_J^k / k! \to 0$ lorsque $K \to \infty$).

Comme y_{Ki} est continue, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$x, x' \in J,\ |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |y_{Ki}(x) - y_{Ki}(x')| \leq \epsilon\ .$$

Mais alors :

$$|y_i(x) - y_i(x')| \leq 3\epsilon$$

pour tout i. D'où y_i et donc Y sont continues sur J. C'est vrai pour tout segma $J \subseteq I$. Donc Y est continue sur I.

De plus, on a :

$$Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)Y_K(t) + B(t)dt - (Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)Y(t) + B(t)dt) = \int_{x_0}^{x} A(t)(Y_K(t) - Y(t))dt$$

Or :

$$|| \int_{x_0}^{x} A(t)(Y_K(t) - Y(t))dt|| \leq | \int_{x_0}^{x} M_J \sum_{k=K}^{\infty} ||A||_J^k r_J^k / k!|$$

$$\to 0$$

quand $K \to \infty$. Donc $\lim_{K\to\infty} Y_{K+1}(x) = Y(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)Y(t) + B(t)dt$ pour tout x dans I.

Mais alors Y est dérivable et on a bien $Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$. <u>*q.e.d.*</u>

Contre-exemple. L'équation $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ a plusieurs solutions :
$y(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^2}{4} \text{ si } t \geq t_0\,; \\ 0 \text{ si } t < t_0. \end{cases}$
où $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Corollaire 3.4.1 *Soient $b, a_1, ..., a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Alors pour tous $x_0 \in I$, $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$, l'équation :*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = b(x),\ y(x_0) = y_0, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

a une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ $n-$fois dérivable.

Cas homogène : *notons (E) l'équation :*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0\ .$$

Pour tout $x_0 \in I$, l'application :

$$\{ \textit{ solutions de } (E)\} \to \mathbb{R}^n,\ y \mapsto (y(x_0), ..., y^{n-1}(x_0))$$

est un isomorphisme. en particulier l'espace des solutions de (E) est de dimension n.

Démonstration : On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & ... & & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & & ... & a_1 \end{pmatrix}$.

<u>*q.e.d.*</u>