COURS DU MARDI 28/2/17

Chapitre IV Fractions rationnelles

1 Définitions

Soient $P = a_0 + ... + a_n X^d$ un polynôme où $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

On note $d = \deg P$ le plus grand entier $i \geq 0$ tel que $a_i \neq 0$. Si $P = 0$, on pose $\deg P = -\infty$. C'est le degré de P.

Le terme dominant est $a_d X^d$, a_d est le coefficient dominant de P.

Somme et produit :

si $P = a_0 + ... + a_m X^m$ et $Q = b_0 + ... + b_n X^n$ sont des polynômes, alors on pose

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) X^i$$

$$PQ = \sum_{i=0}^{m+n} c_i X^i$$

où $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$.

On vérifie que $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.

On en déduit que si $PQ = 0$, alors P ou $Q = 0$.

Divisibilité :

si P, Q sont des polynômes, si $P = BQ$ pour un certain polynôme B, on dit que Q divise P, notation : $Q|P$.

Division euclidienne :

soient P, Q polynômes avec $Q \neq 0$. Il existe un unique (B, R) couple de polynômes tel que $P = BQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$.

Polynômes irréductibles :

un polynôme P est irréductible s'il n'existe pas de polynôme de degré $0 < d < \deg P$ qui divise Q.

Théorème 1.1 *Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme P est irréductible $\Leftrightarrow \deg P = 1$ ou $\deg P = 2$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $\Delta(P) = a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$.*

Exemple : $X^2 + 1$.

Théorème 1.2 *Dans $\mathbb{C}[X]$, un polynôme P est irréductible $\Leftrightarrow \deg P = 1$.*

Proposition 1.3 *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}^\times$, $P_1, ..., P_r$ irréductibles unitaires (*i.e. *de coefficient dominant 1) deux à deux distincts tels que $P = cP_1^{a_1}...P_r^{a_r}$ pour certains $a_i \geq 1$. De plus, c, r ; les P_i et les a_i dont uniques (à permutation près). Même énoncé sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{C}$.*

Exemples :

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \ .$$

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) \ .$$

Définition 1 *On dit que deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux si $D|P$ et $D|Q \Rightarrow D =$constante.*

Rappelons que P, Q sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ $^\exists U, V$ polynômes tels que $PU + QV = 1$ (relation de Bézout).

2 Corps des fractions rationnelles

Définition 2 *On note $\mathbb{R}(X) = \{\frac{P}{Q} \ : \ P \in \mathbb{R}[X],\ Q \in \mathbb{R}[X],\ Q \neq 0\}$ où deux symboles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$, $P, Q, R, S \in \mathbb{R}[X]$, $Q, S \neq 0$, sont égaux si et seulement si : $PS = QR$.*

Proposition 2.1 *Pour les lois suivantes :*

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$$

$$\frac{P_1}{Q_1} . \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

$\mathbb{R}(X)$ est un corps. De plus le morphisme $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}(X)$, $P \mapsto \frac{P}{1}$ est injectif.

On définit $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg P - \deg Q$.

Exercice 1 *C'est bien défini ! et $\deg(f + g) \leq \deg f + \deg g$.*

Mêmes définitions avec $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$.

Définition 3 *Si $f = P/Q$ et si les polynômes P, Q sont premiers entre eux, on dit que la fraction est irréductible.*

3 Décompositions en éléments simples

Théorème 3.1 *Soit f une fraction rationnelle dans $K(X)$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors f s'écrit de manière unique :*

$$f = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right)$$

où $n \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}$, $D_i \in K[X]$ sont irréductibles unitaires deux à deux distincts, $A_{ij} \in K[X]$ sont de degré $\deg A_{ij} < \deg D_i$ (donc constants si D_i de degré 1 et de degré ≤ 1 si D_i de degré 2). De plus si $f = \frac{P}{Q}$ est la forme réduite de f, alors E est le reste de la division euclidienne de P par Q et $Q = D_1^{n_1} ... D_r^{n_r}$ est la décomposition de Q en facteurs irréductibles.

Démonstration : unicité : il suffit de montrer que si

$$E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right) = 0$$

alors tous les A_{ij} sont nuls et $E = 0$.

Or,

$$E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right) = 0$$

$$\Rightarrow E = - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right) \quad .$$

À droite, on a une fraction de degré $\leq \sum_i \sum_j \deg \left(\frac{A_{ij}}{D_i^j} \right) < 0$. Donc $\deg E < 0$ *i.e.* $E = 0$.

Mais alors

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i} \left(\frac{\sum_j A_{ij} D_i^{n_i - j}}{D_i^{n_i}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n_1} A_{1j} D_1^{n_1 - j}}{D_1^{n_1}} = - \sum_{i \geq 2} \left(\frac{\sum_j A_{ij} D_i^{n_i - j}}{D_i^{n_i}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n_1} A_{1j} D_1^{n_1 - j}}{D_1^{n_1}} = \frac{A}{\prod_{i \geq 2} D_i^{n_i}}$$

pour un certain polynôme A. Donc

$$D_1^{n_1} | \left(\sum_{j=1}^{n_1} A_{1j} D_1^{n_1-j}\right) \left(\prod_{i\geq 2} D_i^{n_i}\right)$$

comme D_1 est premier avec $\prod_{i\geq 2} D_i^{n_i}$, on en déduit que

$$D_1^{n_1} | \left(\sum_{j=1}^{n_1} A_{1j} D_1^{n_1-j}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n_1} A_{1j} D_1^{n_1-j} = 0$$

pour des raisons de degré. Donc A_{1n_1} est divisible par D_1 donc $A_{1n_1} = 0$ (pour des raisons de degré). On simplifie par D_1 et on trouve que $A_{1(n_1-1)} = 0$ et $A_{1j} = 0$ pour tout j. De mm̂e $A_{ij} = 0$ pour tous ij.

Existence :

Si R, S sont premiers entre eux, alors $\frac{P}{RS} = \frac{P_1}{R} + \frac{P_2}{S}$ pour certains P_i. En effet : $RU + SV = 1$ pour certains polynômes U, V. Donc $\frac{P}{RS} = \frac{P(RU+SV)}{RS} = \frac{PU}{S} + \frac{PV}{R}$.

On a donc avec les notations de l'énoncé $f = \sum_i \frac{A_i}{D_i^{n_i}}$ pour certains polynômes A_i. On fait la division euclidienne de A_i par D_i :

$$A_i = B_i D_i + R_i$$

où $\deg R_i < D_i$. Alors $\frac{A_i}{D_i^{n_i}} = \frac{B_i}{D_i^{n_i-1}} + \frac{R_i}{D_i^{n_i}}$. On en déduit par une récurrence facile que $\frac{A_i}{D_i^{n_i}} = E_i + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j}$ pour certains polynômes A_{ij} de degrés $degA_{ij} < \deg D_i$ et certains polynômes E_i.

D'où

$$f = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j}\right)$$

avec $E = \sum_i E_i$.

<u>*q.e.d.*</u>

3.1 Cas de $\mathbb{C}$

Un élément simple est une fraction de la forme $\frac{a}{(X-r)^n}$, $a \in \mathbb{C}^\times$, $r \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$.

Théorème 3.2 *Les monômes $1, X, ..., X^k, ...$ et les éléments simples $\frac{1}{(X-r)^n}$, $r \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, forment une base de $\mathbb{C}(X)$ comme $\mathbb{C}-$espace vectoriel.*

3.2 Cas de $\mathbb{R}$

Un élément simple est une fraction de la forme $\frac{a}{(X-r)^n}$, $a \in \mathbb{R}^\times$, $r \in \mathbb{R}$ ou bien $\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $p, q \in \mathbb{R}$ et $p^2 < 4q$.

Théorème 3.3 *Les monômes* $1, X, ..., X^k, ...$ *et les éléments simples* $\frac{1}{(X-r)^n}$, $r \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $\frac{1}{(X^2+pX+q)^n}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, $n \geq 1$ *et les* $\frac{X}{(X^2+pX+q)^n}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, $n \geq 1$ *forment une base de* $\mathbb{R}(X)$ *comme* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel.*

Exemples : Si $f = P/Q$ est irréductible, si $Q = (X-a)Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$, alors f a un élément simple de la forme $\lambda/(X-a)$ avec $\lambda = P(a)/Q'(a)$. Plus généralement, si $Q = (X-a)^h Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$, alors f a un élément simple de la forme $\lambda/(X-a)^h$ avec $\lambda = P(a)/Q_1(a)$.

Exercice 2 *a)*

$$\frac{X+3}{(X-1)(X+2)} = \frac{4/3}{X-1} + \frac{(-1/3)}{X+2} \ .$$

b) Si $\deg P < n$, *alors*

$$\frac{P}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k P(z^k)}{X - z^k}$$

où $z = e^{2i\pi/n}$.

c)

$$\frac{X+2}{(X+1)^2(X-2)^2} = \frac{(-5/27)}{X-2} + \frac{4/9}{(X-2)^2} + \frac{5/27}{X+1} + \frac{1/9}{(X+1)^2}$$

d)

$$\frac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = ?$$

e)

$$\frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = ?$$