Examen partiel n^{o} 1

sujet bis

durée : 1h
documents interdits

Question de cours

Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^4$? **2pts**

Exercice 1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. **2pts**

b) Si A est inversible, calculer A^{-1} et A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. **2pts**

Exercice 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. **3pts**

b) Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A, I_3. **3pts**

Exercice 3

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = 0 \text{ et } y + z + t = 0\}$.

On admettra que E est un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Soient $u_1 = (0, 2, 2, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (3, 0, 0, 3)$. Soit $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.

a) Déterminer une base de E et en déduire sa dimension. **3pts**

b) Déterminer une base de F. **3pts**

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$. **3pts**