

### Feuille 3 Algèbre Applications linéaires

Exercice 1.

Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec  $a \in \mathbb{R}$ ).

- a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x, y) \mapsto (y, x)$     b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x, y) \mapsto (x, a)$     c)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x, y) \mapsto (ax, ay)$     d)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x, y) \mapsto (x + a, y + a)$   
e)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$     f)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $(x, y) \mapsto (2x, 0, x - y)$     g)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $x \mapsto \sin(x)$

Exercice 2.

Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même définies par

$$f(x, y) = (x, 0) \quad \text{et} \quad g(x, y) = (0, y)$$

Déterminer  $f + g$ ,  $f \circ g$ ,  $f^2$  et  $g^2$ .

Exercice 3.

On considère  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3$$

- Déterminer l'image par  $f$  d'un élément  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer le noyau et l'image de  $f$  et donner une base de chacun d'eux.
- Montrer que  $f \circ f = f$

Exercice 4.

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \quad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \quad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$$

Où  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- Démontrer que  $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\}$  et  $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la dimension de chacun d'eux.
- Montrer que  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires.

Exercice 5.

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1$$

Où  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- Montrer que  $f$  est bijective.
- Montrer que  $f^3 = Id_{\mathbb{R}^3}$ .
- Démontrer que  $F = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer sa dimension.

Exercice 6.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont l'image de la base canonique  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$

$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$

$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

Calculer  $f^2 = f \circ f$

En déduire que  $f$  est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer  $f^{-1}$ .

Exercice 7.

Soit  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par  $f$ . En déduire la dimension de  $\text{im}(f)$ .
2. Déterminer la dimension de  $\text{ker}(f)$  et en donner une base.

Exercice 8.

Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie, pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ , par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de  $u$ . Est-elle injective ?
3. En déduire que  $u$  est surjective.

Exercice 9.

Soit  $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application définie pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit  $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de  $\text{ker}(u)$  et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de  $\text{Im}(u)$  et sa dimension.
3. A-t-on  $\text{ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^4$  ?
4. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on  $\text{ker}(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$  ?

Exercice 10.

Soit  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer une base de  $\text{ker}(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
3. A-t-on  $\text{ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$  ?

Exercice 11.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  tel que  $f^2 = f$  (on dit que  $f$  est un projecteur).

1. Démontrer que  $\text{Id}_{\mathbb{K}^n} - f$  est un aussi un projecteur.
2. Démontrer que  $\text{ker}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n} - f) = \text{im}(f)$ .
3. Démontrer que  $\text{ker}(f)$  et  $\text{im}(f)$  sont supplémentaires.
4. Donner un exemple de projecteur  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Exercice 12.

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

1. Montrer que si  $v_1, v_2, \dots, v_p$  engendrent  $\mathbb{R}^n$  alors  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$  engendrent  $\text{im}(f)$ .
2. Montrer que si  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$  forment un système libre alors  $v_1, v_2, \dots, v_p$  est libre aussi.
3. Montrer que si  $f$  est injective et si  $v_1, v_2, \dots, v_p$  est un système libre alors  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$  est libre aussi.

Exercice 13.

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  tels que  $u \circ v = 0$ . Montrer que :  $\text{im}(v) \subseteq \ker(u)$

En déduire que :  $\text{rang}(u) + \text{rang}(v) \leq n$

Exercice 14.

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe  $C^\infty$ . On note  $\varphi$  et  $\psi$  les deux applications de  $E$  vers  $E$  définies respectivement (pour tout  $f \in E$ ) par :

$$\varphi(f) = f'; \quad \forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Vérifier de  $\varphi$  et  $\psi$  sont linéaires.
2. Exprimer  $\psi \circ \varphi$  et  $\varphi \circ \psi$ .
3. Discuter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité respectives de  $\varphi$  et  $\psi$ .

Exercice 15.

Soit  $H$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  engendré par les fonctions sin et cos .

1. Déterminer une base de  $H$  et préciser sa dimension.
2. Soit  $F = \left\{ f \in H \mid f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \right\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ . Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de  $F$ .
3. Soit  $\varphi$  l'application de  $H$  vers  $\mathbb{R}^2$  définie pour toute  $f \in H$  par

$$\varphi(f) = \left( f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

Montrer que  $\varphi$  est une bijection linéaire.

4. Soit  $\psi$  l'application de  $H$  vers  $H$  définie pour toute  $f \in H$  par  $\psi(f) = f'$ . Montrer que  $\psi$  est un automorphisme de  $H$ .

Exercice 16.

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire telle que :

$$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), \quad f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et}$$
$$f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$$

Soient  $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$  et  $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$

1. Montrer que  $E_{-1}$  et  $E_1$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que  $e_1 - e_2$  et  $e_1 - e_3$  appartiennent à  $E_{-1}$  et que  $e_1 + e_2 + e_3$  appartient à  $E_1$ .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de  $E_{-1}$  et de  $E_1$  ?
4. Déterminer  $E_{-1} \cap E_1$ .
5. A-t-on  $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$  ?
6. Calculer  $f^2 = f \circ f$  et en déduire que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

Exercice 17.

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ ,  $E$  étant un espace vectoriel de dimension  $n$  avec  $n$  pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (a)  $u^2 = O_E$  (où  $O_E$  est l'application linéaire nulle) et  $n = 2 \dim(\text{Im}(u))$
- (b)  $\text{Im}(u) = \ker(u)$

Exercice 18.

Soit  $u: E \rightarrow E$  une application linéaire et  $\lambda$  un réel.

1. Soit  $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ . Calculer  $u(x)$  pour  $x \in E_\lambda$

Montrer que est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2. Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , montrer que  $u(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Si  $\lambda \neq 0$ , montrer que  $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Exercice 19.

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{Im}(f)$$

Exercice 20.

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i)  $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$
- (ii)  $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Exercice 21.

Pour une matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . On définit la trace de  $A$  par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

1. Montrer que  $\text{tr}$  est une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$ , et que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ .
3. Pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , telles que  $\text{tr}(A) \neq -1$ , déterminer toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $X + \text{tr}(X)A = B$ .
4. Montrer que l'on peut pas trouver  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB - BA = I_n$ .

Exercice 22.

Soit  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par

$$\phi(A) = A - {}^t A$$

1. Rappeler la dimension de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer le noyau de  $\phi$ , c'est-à-dire les matrices telles que  $\phi(A) = O$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de  $\phi$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme  $\phi(A)$  avec  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . En déduire que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et une matrice  $J$ , à déterminer tel que  $\phi(A) = \lambda J$ .