

**Exercice 1 (action de groupe)**

Soit  $G$  un groupe fini,  $Z(G)$  son centre. On fait agir  $G$  sur lui-même par conjugaison.

1. On suppose  $G$  non commutatif. Soit  $x$  un élément de  $G$  non dans  $Z(G)$  et  $S_x$  le stabilisateur de  $x$ . Montrer que  $Z(G) \subset S_x \subset G$ , où les inclusions sont strictes.
2. En déduire que si  $G$  n'est pas commutatif,  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$  dont l'indice est strictement supérieur au plus petit nombre premier divisant  $|G|$ , l'ordre de  $G$ .
3. Soit  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier. Quelles sont les valeurs possibles pour l'ordre du centre d'un groupe d'ordre  $p^n$  ?  
Quel est le centre d'un groupe d'ordre  $p^2$ , et d'un groupe non commutatif d'ordre  $p^3$  ?
4. Donner un exemple de groupe non commutatif d'ordre  $p^3$ .
5. Montrer que si  $G$  est d'ordre  $p^2$ , on a  $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  ou  $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Exercice 2 (action de groupe)**

Soit  $p$  un nombre premier,  $n$  un entier  $\geq 1$ ,  $G$  un groupe d'ordre  $p^n$ ,  $Z(G)$  son centre et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$  non réduit à l'élément neutre. Montrer que  $H \cap Z(G) \neq \{e\}$ . EN déduire que l'ordre de  $Z(G)$  est strictement supérieur à 1. (On fera agir  $G$  par conjugaison sur  $H$ )

**Exercice 3 (action de groupe, orbites)**

Un groupe de 35 éléments agit sur un ensemble de 19 éléments sans fixer aucun d'eux. Combien y-at-il d'orbites pour cette action ?

**Exercice 4 (action de groupe, stabilisateurs)**

Soit  $E$  un ensemble et  $G$  un groupe opérant sur  $E$ . Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $E$  appartenant à la même orbite. Montrer que les stabilisateurs  $G_x$  de  $x$  et  $G_y$  de  $y$  sont des sous-groupes conjugués dans  $G$ . En déduire que  $G_x$  et  $G_y$  ont même ordre.

**Exercice 5 (action de groupe, formule de Burnside)**

Soit  $G$  un groupe fini qui opère sur un ensemble fini  $S$ . On définit pour tout  $g \in G$  le sous-ensemble de  $S$  noté  $S^g$  suivant :

$$S^g = \{s \in S : gs = s\}.$$

Ainsi  $S^g$  est l'ensemble des points fixes de  $S$  sous l'action de  $g$ . Pour  $s \in S$ , on note  $G_s$  le fixateur de  $s$  pour l'action de  $G$  sur  $S$ .

1. Construire la table de l'opération

$$\varphi : G \times S \longrightarrow \{V, F\}$$

Définie par :

$$\varphi(g, s) = V \text{ si } gs = s$$

$$\varphi(g, s) = F \text{ sinon}$$

Dans le cas où  $G = D_6$  et  $S = \{A, B, C\}$ , où  $ABC$  est un triangle équilatéral.

2. Démontrer :  $\sum_{s \in S} |G_s| = \sum_{g \in G} \text{card}(S^g)$ .
3. En déduire la formule de Burnside :

$$|G| \times N = \sum_{g \in G} \text{card}(S^g)$$

Où  $N$  est le nombre d'orbites.

### Exercice 6 (Groupe quotient, centre)

Soit  $G$  un groupe de centre  $C$ .

1. Montrer que  $C$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .
2. Montrer que si  $G/C$  est monogène, alors  $G$  est un groupe abélien.

### Exercice 7 (Sous-groupe distingué)

Soit  $G$  un groupe et  $H$  et  $K$  deux sous-groupes distingués de  $G$ . Montrer que le sous-groupe de  $G$  engendré par  $H \cup K$  est aussi distingué dans  $G$ .

### Exercice 8 (Sous-groupe distingué)

Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ ,  $L$  un sous-groupe de  $H \cap K$  distingué dans  $H$  et dans  $K$ . Montrer que  $L$  est distingué dans le sous-groupe engendré par  $H \cup K$ .

### Exercice 9 (Sous-groupe distingué)

Montrer que dans un groupe, tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

### Exercice 10 (Sous-groupe distingué)

Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  des sous-groupes de  $G$ . On suppose que :

- $H$  et  $K$  sont des sous-groupes distingués de  $G$ ,
- $H \cap K = \{e\}$ ,
- $HK = G$ .

On définit une application  $f : H \times K \rightarrow G$  par  $F(h, k) = hk$ .

1. Montrer que  $f$  est une application injective.
2. Montrer que  $f$  est un isomorphisme de groupes.

### **Exercice 11 (Groupe cyclique)**

Montrer que tout groupe abélien simple est cyclique et isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier.

### **Exercice 12 (sous-groupes conjugués)**

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . On appelle conjugués de  $H$  les sous-ensembles  $xHx^{-1}$  avec  $x \in G$ . Montrer que les conjugués de  $H$  sont des sous-groupes et que l'intersection des conjugués est un sous-groupe distingué de  $G$ .

### **Exercice 13 (Groupe d'ordre 9)**

Montrer qu'un groupe d'ordre 9 possède toujours un sous-groupe d'ordre 3. Montrer qu'il ne peut en avoir qu'un ou quatre. En déduire qu'un groupe d'ordre 9 est toujours abélien.