Licence 3-ième année **7 janvier 2016**
2015–2016

Examen d'Algèbre V

Durée 3 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Questions de cours (5 points)

1. Définir le produit semi-direct de deux groupes ;
2. Donner la liste (à isomorphisme près) des sous-groupes finis du groupe réel orthogonal $O(2)$;
3. Donner la description géométrique d'un élément quelconque dans le groupe réel orthogonal $O(3)$;
4. Formuler les théorèmes de Sylow.

Problème 1 (10,5 points)

1. Soit G un groupe d'ordre $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.
   (a) Montrer que G admet un seul $7 - Sylow$ et un seul $11 - Sylow$;
   (b) Montrer que si P est le $11 - Sylow$ de G alors P est contenu dans le centre de G. (Indication : on considère l'action d'un $3 - Sylow$ et l'action d'un $7 - Sylow$ sur P par conjugaison.)
   (c) Montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre 77 et qu'il est distingué dans G. Est-ce que ce sous-groupe d'ordre 77 est cyclique ? Justifier sa réponse ;
   (d) Montrer que G admet un sous-groupe cyclique d'ordre 33.
2. Soit $H = (\mathbb{Z}_7, +)$ et $\mathrm{Aut}(H)$ le groupe des automorphismes de H.
   (a) Quels sont les générateurs de H ?
   (b) Trouver l'ordre de $\mathrm{Aut}(H)$. Est-ce que $\mathrm{Aut}(H)$ est un groupe cyclique ? Justifier sa réponse.
   (c) Montrer qu'il existe un homomorphisme non-trivial $\varphi : \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(H)$.
   (d) Montrer qu'il existe un groupe non-commutatif d'ordre 21. (Indication : on peut construire un produit semi-direct de $\mathbb{Z}_3$ et $\mathbb{Z}_7$ en utilisant (c).)
3. Avec les notations et les hypothèses de la partie 1 de l'exercice, montrer que G n'est pas forcément commutatif.

Problème 2 (4,5 points)

1. Soit H un sous-groupe distingué de S_4 qui contient un $4-$cycle. Montrer que $H = S_4$.
2. Soient P_1 et P_2 deux sous-groupes d'ordre 8 de S_4. On suppose que $P_1 \cap P_2$ contient un $4-$cycle. Montrer que $P_1 = P_2$. (Indication : on montre que le normalisateur de $P_1 \cap P_2$ dans S_4 contient $P_1 \cup P_2$, on considère le sous-groupe engendré par $P_1 \cup P_2$ et on utilise 1.)

3. Donc un $4-$cycle est dans un unique sous-groupe d'ordre 8 de S_4. En déduire le nombre de sous-groupes d'ordre 8 de S_4 en comptant le nombre de $4-$cycles.

Problème 3 (4 points) Un groupe G est dit divisible si pour tout $g \in G$ et tout entier strictement positif m il existe $h \in G$ tel que $h^m = g$. Soit G divisible et H un sous-groupe de G d'indice fini n.

1. En considérant l'action de G sur G/H par multiplication à gauche montrer qu'il existe un homomorphisme $\varphi : G \to S_n$ tel que $\ker(\varphi) \subset H$.
2. Soit m l'indice de $\ker(\varphi)$ dans G. Montrer que m est fini et divise $n!$.
3. Montrer que $g^m \in H$ pour tout $g \in G$.
4. En déduire que $G = H$, i.e. le groupe divisible G ne contient pas de sous-groupes d'indice fini strictement supérieur à 1.