Licence 3-ième année **5 novembre 2015**
2015–2016

Partiel d'Algèbre

Durée 2 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Questions de cours (4 points)

1. Donner la définition d'action d'un groupe sur un ensemble.
2. Donner la formule des classes pour l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.
3. Formuler le premier théorème d'homomorphisme de Noether.
4. Formuler le théorème de Burnside sur le nombre d'obites pour une action d'un groupe fini sur un ensemble fini.

Problème 1 (2 points) Soit $G = \{a \in \mathbb{R} | a > 0, a \neq 1\}$. Comme d'habitude, si $a \in G$ on désigne par $\ln a$ le logarithme de a. Est-ce que l'ensemble G forme un groupe pour l'operation $a * b = a^{\ln(b)}$? Justifiez votre réponse.

Problème 2 (4 points) Soit G un groupe fini dont tout les éléments sont d'ordre au plus 2. On suppose que G n'est par réduit à $\{e\}$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que le cardinal de G est pair.
3. Soit $a \neq e$ un element de G et $H =< a >$. Montrer que tout élément du groupe quotient G/H est d'ordre au plus deux.
4. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.

Problème 3 (7 points) Soit $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Soit $X := (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$. On considère l'action :

$$G \times X \to X$$

$$\left(g, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour cette action X a deux orbites.
2. Déterminer le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire l'ordre de G.
3. Montrer que $\det : G \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\star$ est surjectif. En déduire l'ordre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) := \ker(\det)$.
4. Comme d'habitude, on désigne par S_n le groupe de permutations de $\{1, \cdots, n\}$. Quel est l'ordre du groupe S_5 ? Montrer, en donnant des exemples, que dans S_5 il y a des éléments d'ordre $2, 3, 4, 5, 6$. Montrer que S_5 ne contient pas d'éléments d'ordre 8 ou 10.

5. Soient $a := -I_2$ et $b := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Trouver les ordres de a et de b. En déduire l'ordre de ab.
6. En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \ncong S_5$.

Problème 4 (8 points) On se propose de déterminer les sous groupes distingués de S_4.

1. Soit $F_4 = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Montrez que F_4 est un sous-groupe distingué dans S_4.
2. On se propose de démontré que F_4 est le seul sous-groupe distingué d'ordre 4 dans S_4.
   (a) Soit N un sous-groupe distingué d'ordre pair dans S_4. Montrez que N contient F_4. (Indication : On pourra utiliser le théorème de Cauchy.)
   (b) Conclure.
3. Soit M un sous-groupe distingué et propre dans S_4 d'ordre divisible par 3.
   (a) Montrez que $|M| = 12$ ou 24.
   (b) Motrer que $M \cap A_4$ est un sous groupe distingué d'ordre divisible par 3.
   (c) En déduire que A_4 et F_4 sont les seuls sous-groupes distingués non-triviaux dans S_4. (Rappelons que A_4 est le sous groupe alterné de S_4.)