Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2014
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 3

Exercice 1 *Soit G un groupe abelien et $H = \{x \in G : \mathrm{ord}(x)$ est fini$\}$.*
Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 2 *Soit G un groupe d'ordre $2q$ avec q premier, $q \geqslant 3$.*
Soit $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe distingué d'ordre 2.
Montrer que G est cyclique.

Exercice 3 *Soit G un groupe fini et $x, y \in G$ avec $\mathrm{ord}(x) = 3$ et $\mathrm{ord}(y) = 5$.*
Peut-on avoir $\mathrm{ord}(xy) \neq 15$?

Exercice 4 *Soit G un groupe et $a, b \in G$ avec $a^2 = e$ et $a^{-1}b^2a = b^3$.*
Montrer que $b^5 = e$.

Exercice 5 *Soit G un groupe fini.*
Montrer que $|G|$ est impair $\Leftrightarrow \forall x\ \exists y : x = y^2$.

Exercice 6 *Montrer que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{S}_3)$.

(Indication : utiliser le fait que chaque groupe contient exactement trois éléments d'ordre 2.)

Exercice 7 *a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $S_n \simeq A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $S_n \not\simeq A_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) Pour $n = 3$, montrer que $A_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 8 *Soit D_4 le groupe diédral à 8 éléments, c'est-à-dire le groupe engendré par a et b avec*

$$a^4 = b^2 = e \quad \text{et} \quad bab = a^{-1} \tag{1}$$

et dont les éléments sont $\{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

1. *Soit $H =< a >$ et $K = \langle b \rangle$. Montrer que $D_4 = H \rtimes K$.*
   En déduire que $D_4 \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. *Soit $H = \langle a^2, b \rangle$ et $K = \langle ab \rangle$. Montrer que $D_4 = H \rtimes K$. En déduire que $D_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Exercice 9 *Soit Q le groupe des quaternions. C'est-à-dire le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *engendré par les matrices* $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. *Montrer que chaque sous-groupe non trivial de Q contient le centre de Q.*
En déduire qu'on ne peut écrire Q comme produit semi-direct de deux sous-groupes non triviaux.

Exercice 10 *Soit p un nombre premier et a un nombre entier. On regarde l'ensemble des collier à p perles qui peuvent avoir a couleurs différentes. On considère des colliers égaux s'ils différent par une rotation.*

Combien y a-t-il de colliers ?

Exercice 11 *On veut colorier les faces d'un cube avec les deux couleurs : rouge et bleu. On ne peut pas distinguer deux coloriages qui différent par une rotation.*

Combien y a-t-il de coloriages ?

Exercice 12 *Un graphe $G(V, E)$ est un ensemble V de sommets avec un ensemble E d'arêtes où chaque arête est un sous-ensemble de cardinal 2 de E. Deux graphes sont isomorphes s'il y a une bijection entre leur sommets qui donne aussi une bijection sur les arêtes.*

Compter le nombre des graphes non-isomorphes à 4 sommets.

Exercice 13 *Soit D_n le groupe diédral d'ordre $2n$. Montrer que* $\mathrm{Aut}(D_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ *indication : on note r la rotation d'angle $2\pi/n$ et s la symétrie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. montrer que si $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors il existe un automorphisme de D_n qui envoie r sur r^a et s sur $r^\beta s$.*

Exercice 14 *Montrer que $D_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq D_4 \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour un certain ϕ non trivial.*

Exercice 15 *a) Déterminer les matrices g de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ *d'ordre* $1, 2, 4$ *ou* 8. *En déduire que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ *possède un seul sous-groupe d'ordre 8. Montrer que ce sous-groupe est isomorphe à Q_8.*

b) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \not\simeq \mathfrak{S}_4$. *Montrer que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq Q_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ *(considérer l'action sur les droites de $\mathbb{F}_3^2$.*

d) Montrer que $\mathrm{Aut}(Q_8) \simeq \mathfrak{S}_4$ *indication : considérer l'action de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ *sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ *par conjugaison.*