Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2014

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 5

Exercice 1. Soit Q le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

avec j une racine primitive cubique de l'unité.

1. Montrer que Q est d'ordre 12.
2. Montrer que A_4, D_6 et Q sont deux à deux non isomorphes.
   (indication : considérer par exemple les 2-Sylow).

Exercice 2. Vérifier que les deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

sont des rotations et les écrire sous la forme PRP^{-1} où $P \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et R est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. En particulier, déterminer leur axe et leur angle.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathrm{O}(n) \simeq \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathrm{O}(n) \simeq \mathrm{SO}(n) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Exercice 4. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices orthogonales $n \times n$ à coefficients entiers.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$.
2. En déduire l'ordre du groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que $\mathrm{O}_2(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est cyclique d'ordre 4.
   En déduire que $\mathrm{O}_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 8.

4. Si $\sigma \in S_n$, on note $M_\sigma = (m_{i,j})$ la matrice $n \times n$ telle que $m_{i,j} = 1$ si $i = \sigma(j)$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que $M_\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbb{Z})$ pour tout $\sigma \in S_n$. En déduire que S_n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{Z})$.

5. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de M contient exactement un coefficient non nul égal à ± 1.

6. Déterminer le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathrm{O}_n(\mathbb{Z})$.

7. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{O}_n(\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$.

Exercice 5. Soit D_6 le groupe diédral d'ordre 12 des isométries qui laissent stable l'hexagone régulier de sommets $e^{2ik\pi/6}$, $k = 0, ..., 5$. Déterminer les stabilisateurs des sommets, des arêtes et des diagonales.

Exercice 6. Une réflexion glissée est le produit d'une translation par un vecteur v du plan et d'une réflexion par rapport à une droite parallèle à v. Un *demi-tour* est une rotation d'angle π centrée en un point du plan.

1. Montrer que toute isométrie du plan qui préserve l'orientation est soit une rotation, soit une translation.

2. Montrer que toute isométrie du plan qui renverse l'orientation est soit une réflexion par rapport à une droite, soit une réflexion glissée.

3. Montrer que le produit de 2 demi-tours est une translation.

4. Montrer que toute isométrie du plan qui renverse l'orientation est le produit d'un demi-tour et d'une réflexion.

Exercice 7.

1. On note $r(Z, \varphi)$ la rotation de centre Z et d'angle φ dans le plan. Montrer que
$$r(Z, \varphi) \circ r(Z', \varphi') = \begin{cases} \text{une translation si } \varphi + \varphi' \text{ est un multiple de } 2\pi \\ r(Z'', \varphi + \varphi') \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Soit ABC un triangle dans le plan et soient BAC', CBA' et ACB' trois triangles équilateraléraux à l'extérieur de triangle ABC. Soient X, Y et Z les centres de ces trois triangles.

   Montrer que
$$r\left(X, \frac{2\pi}{3}\right) \circ r\left(Y, \frac{2\pi}{3}\right) \circ r\left(Z, \frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{id}.$$

3. Soit $Z' = r(Y, \frac{2\pi}{3}) \circ r(Z, \frac{2\pi}{3})(Z) = r^{-1}(X, \frac{2\pi}{3})$.

   Montrer que les angles $\widehat{Z'ZY}$ et $\widehat{XZZ'}$ sont égaux à $\frac{\pi}{6}$.

4. En déduire le théorème de Napoléon : Le triangle XYZ est equilatéral.