Exercice 1 *Soient* $A_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Soit T le tétraèdre de sommets A_1, A_2, A_3, A_4.*

Soit G_T le sous-groupe des rotations $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui laissent stables T.

a) *Montrer que G_T est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$.*

b) *Montrer que* $a := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $b := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sont dans G_T.*

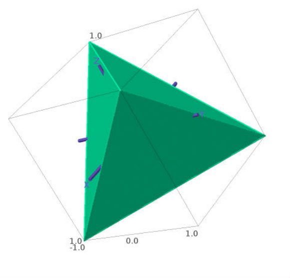
c) *Montrer que le sous-groupe engendré par a et b est d'ordre* 12.

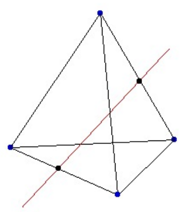
d) *Montrer que* $(12) \notin G_T$.

e) *En déduire que* $G_T \simeq \mathfrak{A}_4$.

f) *Montrer que G_T agit transitivement sur les sommets.*

g) *Montrer que G_T agit transitivement sur l'ensemble* $\{(x,d) \in \{\textit{sommets}\} \times \{\textit{arêtes}\} : x \in d\}$ *(où* $\{\textit{sommets}\} := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *et* $\{\textit{arêtes}\} := \{[A_1A_2], [A_1A_3], [A_1A_4], [A_2A_3], [A_2A_4], [A_3A_4]\}$.





Exercice 2 *Soit C le cube de sommets* $\begin{pmatrix} \pm1 \\ \pm1 \\ \pm1 \end{pmatrix}$. *Soit G_C le groupe des rotations du cube.*

a) *En considérant l'action de G_C sur l'ensemble des diagonales du cube, montrer que G_C est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$.*

b) *Soit r la rotation* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On note d_1 la diagonale issue de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $d_i := r^{i-1}(d_1)$ *si* $i = 2, 3, 4$. *Quelle permutation de* $\{1, 2, 3, 4\}$ *correspond à r ?*

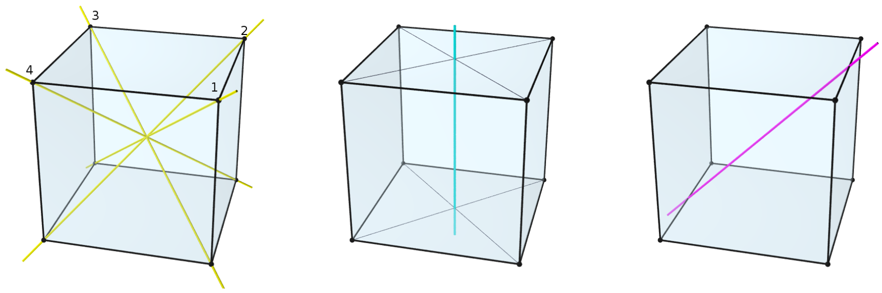
c) *Déterminer la rotation s qui correspond à la transposition* (12).

d) *En déduire que* $G_C = \langle r, s\rangle \simeq \mathfrak{S}_4$.

e) *Montrer que* G_C *agit transitivement sur les sommets.*

f) *Combien le cube a-t-il d'arêtes ? Quelles sont les arêtes issues du sommet* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *?*

g) *Montrer que que* G_C *agit transitivement sur l'ensemble* $\{(x,d) \in \{sommets\} \times \{arêtes\} \ : \ x \in d\}$ *du cube.*



Exercice 3 *Soit* $r := \begin{pmatrix} 1/2 & -t/2 & 1/(2t) \\ t/2 & 1/(2t) & -1/2 \\ 1/(2t) & 1/2 & t/2 \end{pmatrix}$ *où* t *est la racine* > 1 *de* $X^2 - X - 1$.

On reprend aussi les notations de l'exercice 1.

a) *Montrer que* c *est une rotation et déterminer son axe et son angle.*

b) *Soit* T_i *le tétraèdre* $c^{i-1}(T)$, $1 \leqslant i \leqslant 5$.

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t+1 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t+1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t+1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -t+1 \\ -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_5 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t+1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) *Soit $H := \langle a, b\rangle$. Montrer que $\langle a, b, c\rangle = \cup_{i=0}^{4} c^i H$. En déduire que $\langle a, b, c\rangle$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.*

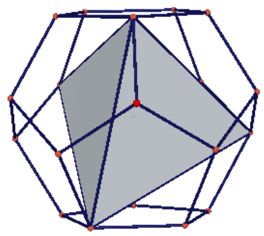
d) *On note D le dodécaèdre de sommets $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$ (*i.e.* la réunion des sommets des tétraèdres T_i). Combien y a-t-il de sommets ? Soit G_D le groupe des rotations qui laissent stable D (*i.e.* l'ensemble de ses sommets). Montrer que $\langle a, b, c\rangle \leqslant G_D$.*

e) *Montrer que $\langle a, b, c\rangle$ agit transitivement sur les sommets de D.*

f) *Montrer que les tétraèdres $\pm T_i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, sont les seuls tétraèdres dont les sommets sont dans D et les arêtes de longueur $2\sqrt{2}$.*

g) *Parmi les tétraèdres ci-dessus, quels sont ceux qui contiennent le sommet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?*

h) *En déduire que $G_D = \langle a, b, c\rangle$.*



Exercice 4 *Soit T le polyèdre de sommets les 12 points suivants :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x/3 \\ x/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x/3 \\ 1 \\ x/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x/3 \\ x/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x/3 \\ x/3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x/3 \\ -1 \\ x/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -x/3 \\ x/3 \end{pmatrix}, x = \pm 1$$

a) *Montrer que le groupe des rotations qui laisses stable T est le groupe du tétraèdre de l'exercice 1. On le note encore G_T.*

b) *Montrer que G_T agit transitivement sur les sommets.*

c) *Compter les faces et les arêtes et en déduire que G_T n'agit pas transivement sur les faces ni les arêtes.*