2.7 Partitions d'ensembles

1) Il n'y a qu'une seule partition de $[n] = [\![1, n]\!]$ en une partie c'est $[n]$! Donc $S(n, 1) = 1$.
Un partition de l'ensemble $[n]$ en deux parties non vides est de la forme

$$I_1 \cup I_1^c$$

où $\emptyset \neq I_1 \subsetneq [n]$.
Or, comme la partition $I_1 \cup I_1^c$ est la même que $I_1^c \cup I_1$, on a :

$$S(n, 1) = |\frac{\{\emptyset \neq I_1 \subsetneq [n]\}|}{2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \ .$$

2) Une fonction surjective

$$f : [n] \to [3]$$

est entièrement déterminée par les images réciproques $I_1 = f^{-1}(\{1\})$, $I_2 = f^{-1}(\{2\})$, $I_3 = f^{-1}(\{3\})$. Cela revient donc à compter les triplets (I_1, I_2, I_3) tels que

$$\emptyset \neq I_1, I_2, I_3 \subseteq [n],\ I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = [n] \ .$$

« Pour chaque choix de $\emptyset \neq I_1 \subseteq [n]$, il reste à choisir $\emptyset \neq I_2 \subseteq [n] \backslash I_1$ et forcément $I_3 = [n] \backslash I_1 \backslash I_2$. »Il faut bien entendu que $I_3 \neq \emptyset$ *c-à-d* $I_2 \neq [n] \backslash I_1$.
Le nombre de surjections cherché est donc :

$$\sum_{\emptyset \neq I_1 \subseteq [n]} \underbrace{2^{n-|I_1|} - 2}_{nombre\, de\, parties\, non\, vides\, strictement\, incluses\, dans\, [n] \backslash I_1}$$

On peut regrouper les termes de cette somme selon le cardinal de I_1 :

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\binom{n}{k}}_{nombre\, de\, parties\, de\, cardinal\, k} (2^{n-k} - 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 2) - (2^n - 2) - (1 - 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} - 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 2^n + 3$$

$$= 3^n - 2.2^n - 2^n + 3 = 3^n - 3.2^n + 3 \ .$$

Si I_1, I_2, I_3 sont des parties non vides de $[n]$ telles que $I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = [n]$, alors les six triplets

$$(I_{\sigma(1)}, I_{\sigma(2)}, I_{\sigma(3)}),\ \sigma \in \mathfrak{S}_3$$

définissent la même partition !
Donc $S(n, 3) = \frac{|\text{le nombre de surjections}|}{6} = \frac{3^{n-1}}{2} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$.

3) Soit une partition de $[n+1]$ en k parties de la forme :

$$I_1 \sqcup I_2 \sqcup ... \sqcup I_k \ .$$

Numérotons les parties de sorte que $n+1 \in I_k$. Alors $I_1 \sqcup ... \sqcup I_{k-1} = [n+1] \setminus I_k$.
Donc

$$S(n+1,k) = \sum_{\substack{I_k \subseteq [n+1] \\ n+1 \in I_k}} |\{\text{le nombre de partitions de } [n+1] \backslash I_k \text{ en } k-1 \text{ parties}\}|$$

Chaque I_k est de la forme $\{n+1\} \cup I$ où $I \subseteq [n]$. Dans ce cas $[n+1] \backslash I_k = [n] \backslash I$ a $n - |I|$ éléments.
Donc en regroupant les termes de la somme ci-dessus selon le cardinal de I, on trouve

$$S(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(n-i, k-1)$$

car le nombre de partitions d'un ensemble ne dépend que de son cardinal!

Nombres de Bell

1) Si $I_1 \sqcup ... \sqcup I_N = [n+1]$, alors on peut supposer que $n+1 \in I_N$ et on a une partition

$$I_1 \sqcup ... \sqcup I_{N-1} = [n+1] - I$$

donc compter les partitions de $[n+1]$ revient à compter pour chaque partie I_N de $[n+1]$ contenant $n+1$ le nombre de partitions de $[n+1] \backslash I$.
Il y a bien sûr une bijection entre les parties de $[n]$ et les parties de $[n+1]$ contenant $n+1$: $I \mapsto \{n+1\} \cup I$.
Donc :

$$B(n+1) = \sum_{I \subseteq [n]} B(n - |I|) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = i}} B(n-i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(n-i)$$
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B(j)$$

en posant $j = n - i$.

2) On démontre par récurrence que $B(n) < n!$ si $n \geqslant 3$.
Pur $n = 3$, c'est vrai car $B(3) = 5$ (les 5 partitions de [3] sont [3], $\{1,2\} \cup \{3\}$, $\{1,3\} \cup \{2\}$, $\{2,3\} \cup \{1\}$, $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$).
Si $n \geqslant 3$, alors $B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} B(i)$. Or $B(0) = 0, B(1) = 1 = 1!, B(2) = 2 = 2!$, donc par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} B(i) < \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}$$

$$< n!(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}) \ .$$

Or pour tout $i \geqslant 1$, $i! \geqslant 2^{i-1}$ (récurrence facile).
Donc

$$B(n+1) < n!(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}) = 3n! \leqslant (n+1)!$$

ce qui termine la récurrence !

2.9 Listes

Si $A \subseteq X = \{x_1, ..., x_n\}$, on pose $\chi_A = (\chi_A(1), ..., \chi_A(n)) \in \{0,1\}^n$ où $\chi_A(i) \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in A \\ 0 & \text{si } x_i \notin A \end{cases}$.

1) On a une bijection

$$\{(A,B)\ :\ A,B \subseteq X\} \overset{1:1}{\to} \mathscr{M}_{2,n}(\{0,1\}$$

$$(A,B) \mapsto \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix}$$

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, j,\ \chi_A(j) \leqslant \chi_B(j)$ donc $A \subseteq B$ si et seulement si les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela fait 3^n matrices possibles.

b) $A \supseteq B \Leftrightarrow \forall\, j,\ \chi_A(j) \geqslant \chi_B(j)$ donc $A \subseteq B$ si et seulement si les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela fait 3^n matrices possibles.

c) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \forall\, j,\ \chi_A(j) + \chi_B(j) < 2$ donc $A \subseteq B$ si et seulement si les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela fait 3^n matrices possibles.

2) On a une bijection :

$$\{(A_1, A_2, ..., A_r)\ :\ A_1, ..., A_r \subseteq X\} \overset{1:1}{\to} \mathscr{M}_{r,n}(\{0,1\}$$

$$(A_1, ..., A_r) \mapsto (\chi_{A_i}(j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

On a les équivalences suivantes :

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_r \Leftrightarrow \forall\, j,\ \chi_{A_1}(j) \leqslant \chi_{A_2}(j) \leqslant ... \leqslant \chi_{A_r}(j)$$

$\Leftrightarrow$ les colonnes sont parmi

$$\begin{matrix}0\\|\\0\end{matrix},\ \begin{matrix}0\\|\\0\\1\end{matrix},\ \begin{matrix}0\\|\\0\\1\\1\end{matrix},\ ...,\ \begin{matrix}1\\|\\1\end{matrix}$$

ce qui fait $r+1$ possibilités pour chaque colonne donc $(r+1)^n$ matrices possibles. Donc :

$$|\{(A_1, A_2, ..., A_r)\ :\ A_1, ..., A_r \subseteq X,\ A_1 \subseteq ... \subseteq A_r\}| = (r+1)^n$$

3) De même, $A_1 \cup ... \cup A_r = X \Leftrightarrow \forall\, j,\ \exists\,_i,\ \chi_{A_i}(j) = 1$. Donc les matrices qui correspondent à la condition $A_1 \cup ... \cup A_r = X$ sont celles qui n'ont pas de colonne nulle. Il y a exactement $2^r - 1 = \left| \{0,1\}^r \backslash \left\{ \begin{matrix}0\\|\\0\end{matrix} \right\} \right|$ colonnes non nulles possibles On trouve donc $(2^r-1)^n$.

2.10 Principe d'inclusion-exclusion Si $X_1, ..., X_N$ sont des parties de Rappelons la formule :

$$|X_1 \cup ... \cup X_N| = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant N} |X_{i_1} \cap .... \cap X_{i_k}|\ .$$

1) On pose

$$X_3 = \{1 \leqslant n \leqslant 300\ :\ 3|n\}$$
$$X_5 = \{1 \leqslant n \leqslant 300\ :\ 5|n\}$$
$$X_7 = \{1 \leqslant n \leqslant 300\ :\ 3|n\}\ .$$

On cherche $|X_3 \cup X_5 \cup X_7|$. On trouve :

$|X_3 \cup X_5 \cup X_7| = |X_3| + |X_5| + |X_7| - |X_3 \cap X_5| - |X_3 \cap X_7| - |X_5 \cap X_7| + |X_3 \cap X_5 \cap X_7|$

or, $|X_3| = |\{3k\ :\ k \in \mathbb{Z},\ et 1 \leqslant 3k \leqslant 300\}| = |\{3k\ :\ k \in \mathbb{Z},\ et 1 \leqslant k \leqslant 100\}| = 100$. De même $|X_5| = \frac{300}{5} = 60$, $|X_7| = \left\lfloor \frac{300}{7} \right\rfloor = 42$.
On a aussi

$$X_3 \cap X_5 = 15\mathbb{Z} \cap [\![1, 300]\!] \Rightarrow |X_3 \cap X_5| = \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20$$

car 3 et 5 sont premiers entre eux !
De même,

$$|X_3 \cap X_7| = \left\lfloor \frac{300}{21} \right\rfloor = 14,$$

$$|X_5 \cap X_7| = \left\lfloor \frac{300}{35} \right\rfloor = 8,$$

$$|X_3 \cap X_5 \cap X_7| = \left\lfloor \frac{300}{105} \right\rfloor = 2\ .$$

Conclusion

$$|X_3 \cup X_5 \cup X_7| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162.$$

2) Comme $X \cap Y \cup X \cap Z \subseteq X$, On a :

$$|X| \geqslant |X \cap Y \cup X \cap Z| = |X \cap Y| + |X \cap Z| - |X \cap Y \cap Y \cap Z| = 16 - |X \cap Y \cap Z|$$

Donc

$$16 - |X \cap Y \cap Z| \leqslant |X| \Rightarrow |X \cap Y \cap Z| \geqslant 6 \ .$$

Or, $X \cap Y \cap Z \subseteq X \cap Y$ donc $6 \leqslant |X \cap Y \cap Z| \leqslant 7 \Rightarrow |X \cap Y \cap Z| = 6 \, ou \, 7$.

3) Un *dérangement* est une permutation sans point fixe. On a donc $d_n = |B_1 \cap ... \cap B_n|$. Donc

$$n! - d_n = |(B_1 \cap ... \cap B_n)^c| = |B_1^c \cup ... \cup B_n^c| = |A_1 \cup ... \cup A_n|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| \ .$$

Or $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \sigma(i_1) = i_1, ..., \sigma(i_k) = i_k\}$ qui est en bijection avec les permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!] \backslash \{i_1, ..., i_k\}$.
Donc

$$|A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)! \ .$$

Puisque $|\{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n\}| = \binom{n}{k}\}$, on a :

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \ .$$