Corrections de quelques exercices de la fiche 1

2 Récurrence, sommes, coefficients binomiaux

2.1 Nombre de sous-ensembles

Soit $S=\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ l'ensemble des parties de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.

Si $E\epsilon S$ on pose χ_E la fonction :

χ_E: $\{1,\ldots,n\}\rightarrow\{0,1\}$

$i\mapsto\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } i\epsilon E\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.$

On obtient une bijection $\Phi: S\rightarrow\{0,1\}^n, E\mapsto\chi_E$

de réciproque $\Phi^{-1}: \{0,1\}^n\rightarrow S, f\mapsto f^{-1}(\{1\})$.

Donc $|S|=|\{0,1\}^n|=2^n$.

Soit pour tout $0\leqslant k\leqslant n, S_k$ l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal k.

On a une réunion disjointe $S=\bigcup_{k=0}^n S_k$. Donc $|S|=\sum_{k=0}^n |S_k|$

$\Leftrightarrow 2^n=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

2.2 Règle de la somme

Soit S l'ensemble des parties non vides de l'ensemble $\{0,\ldots,n\}$.

Si $0\leqslant k\leqslant n$, on pose S_k l'ensemble des parties E de $\{0,\ldots.,n\}$ telles que $\max E=k$.

On a une réunion disjointe $S=\bigcup_{k=0}^n S_k$. Donc $|S|=\sum_{k=0}^n |S_k|$.

Or $|S|=2^{n+1}-1$ car $|\{0,\ldots,n\}|=n+1$.

Et, S_k est en bijection avec les parties de l'ensemble $\{0,\ldots,k-1\}$.

(En effet voici la bijection : $\begin{array}{c} S_k\rightarrow\mathcal{P}(\{0,\ldots,k-1\})\\ E\mapsto E-\{k\}\end{array}$

(la réciproque est donnée par $E'\mapsto E'\bigcup\{k\}$*))*

Donc $|S_k|=|\mathcal{P}(\{0,\ldots,k-1\})|=2^k$ car $|\{0,\ldots,k-1\}|=k$.

Donc $2^{n+1}-1=\sum_{k=0}^n 2^k$.

Notons S' l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$ dont le complémentaire a au moins 2 éléments.

On a $|S'|=2^n-1-n$ *(car il y a* $\{1,\ldots,n\}$ *est la seule partie dont le complémentaire est vide et les* n *parties dont le complémentaire a un éléments sont les* $\{1,\ldots,n\}-\{i\}$, $1\leqslant i\leqslant n$*).*

Dans un ensemble d'entiers de cardinal au moins 2 on peut définir son avant-dernier élément.

Soit S'_k l'ensemble des parties $E\subset\{1,\ldots,n\}$ dont le complémentaire E^c a au moins deux éléments et dont l'avant-dernier élément de E^c est k, $0\leqslant k\leqslant n$.

On a bien sûr une réunion disjointe :

$S' = \bigcup_{k=0}^{n-1} S'_k$.

Donc $|S'| = \sum_{k=0}^{n-1} |S'_k|$.

Il y a une bijection entre S'_k et $\mathcal{P}(\{1, \ldots, k-1\}) \times \{k+1, \ldots, n\}$ car une partie E dont le complémentaire a pour avant-dernier élément k est déterminée par son intersection avec $\{1, \ldots, k-1\}$ et par les éléments de son complémentaire qui sont $\geqslant k$. Or il n' y a que deux éléments de E^c qui sont $\geqslant k$, k et un élément dans $\{k+1, \ldots, n\}$ *(ce qui fait $n-k$ possibilités).*

Donc $|S'_k| = 2^k(n-k)$.

D'où, $\boxed{2^n - 1 - n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)2^{k-1}}$.

2.3

Comptons de trois manières différentes le cardinal de l'ensemble de triplets :

$\{(a,b,c) | 1 \leqslant a < b < c \leqslant n+1\}$

- 1ère manière : c'est « le nombre de façons de choisir 3 entiers parmi $n+1$ » c-à-d $\binom{n+1}{3}$.

- 2ème manière : suivant la valeur de c ; cela donne $\sum_{c=3}^{n} |\{(a,b) | 1 \leqslant a < b \leqslant c-1\}| = \sum_{c=3}^{n} \binom{c-1}{2} = \sum_{c=2}^{n-1} \binom{c}{2}$.

- 3ème manière : suivant la valeur de b ; cela donne $\sum_{b=2}^{n} |\{(a,c) | 1 \leqslant a < b < c \leqslant n+1\}| = \sum_{b=2}^{n} \left| \underbrace{\{a | 1 \leqslant a \leqslant b-1\}}_{b-1 \text{éléments}} \times \underbrace{\{c | b+1 \leqslant c \leqslant n+1\}}_{n+1-b \text{éléments}} \right|$

  $= \sum_{b=2}^{n} (b-1)(n+1-b) = \sum_{b=1}^{n-1} b(n-b)$.

Conclusion. $\boxed{\binom{n+1}{3} = \sum_{c=2}^{n-1} \binom{c}{2} = \sum_{b=1}^{n-1} b(n-b)}$ □