# Fiche de TD 10
# Exponentielle de matrices

**Exercice 1** a) Soit $f(t) = \sum_{k\geqslant 0} a_k t^k$ une série entière de rayon de convergence $R$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de norme *matricielle* $||A|| < R$. Vérifier que

$$f(A) := \sum_{k\geqslant 0} a_k A^k$$

converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

b) On pose $e^A = \sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$. Vérifier que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$. Donner un contre-exemple si $A, B$ ne commutent pas.

c) En déduire que $\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $e^A$ est inversible d'inverse $e^{-A}$.

d) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(e^{tA})' = Ae^{tA}$.

e) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ une application dérivable. Montrer que

$$X' = AX \Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R},\, X(t) = e^{tA}X(0)\ .$$

**Exercice 2** a) Soient $k_1, ..., k_r$ des entiers $\geqslant 1$ tels que $\sum_i k_i = n$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que l'application linéaire

$$\mathbb{C}[X]_{<n} \to \mathbb{C}^n,\ P(X) \mapsto (P^{(k)}(\lambda_i))_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 0\leqslant k\leqslant k_i}}$$

est un isomorphisme.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \prod_{1\leqslant i\leqslant r} (X - \lambda_i)^{k_i}$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont distincts et les $k_i \geqslant 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]_{<n}$ tel que :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r,\ \forall\, 0 \leqslant k \leqslant k_i - 1,\ P^{(k)}(\lambda_i) = \lambda_i^k e^{t\lambda_i}\ .$$

Montrer que $P(A) = e^{tA}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer $e^{tA}$.

d) En déduire les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) $x_1, x_2, x_3$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_1' & = & x_1 - 3x_3 \\ x_2' & = & x_1 - x_2 - 6x_3 \\ x_3' & = & -x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{array}\right.$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 1$$

**Exercice 3** Soit $A$ la matrice de l'exercice précédent.

a) Calculer les projecteurs spectraux de $A$.

b) Calculer $D, N$ les parties diagonalisables et nilpotentes de $A$ †.

c) Calculer de nouveau $e^{tA}$.

†. sous-entendu qui commutent