Fiche de TD 2

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 1 a) Vérifier que la famille des lignes de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est liée.

b) Même question avec les colonnes.

Exercice 2 Soit $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous$-\mathbb{R}-$espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. En trouver une base.

b) Le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{H}$ est-il un sous$-\mathbb{C}-$espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$? Quel est le $\mathbb{C}-$espace vectoriel engendré (par la base touvée à la question précédente) ?

Exercice 3 a) Soient $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $m > n$, alors il existe $t_1, ..., t_m \in R$, non tous nuls tels que $t_1 x_1 + ... + t_m x_m = 0$. *(Raisonner par récurrence).*

b) Soit E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soient $e_1, ..., e_n \in E$. Soient $v_1, ..., v_m \in \langle e_1, ..., e_n \rangle$ où $m > n$. Montrer que la famille $v_1, ..., v_m$ est liée.

c) En déduire que toutes les bases d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ont le même nombre d'éléments (dans le cas où E est de dimension finie).

d) Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soient $e_1, ..., e_n \in E$. Montrer que si $0 \neq v \in \langle e_1, ..., e_n \rangle$, alors il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que :

$$\langle e_1, ..., e_n \rangle = \langle e_1, ..., e_{i-1}, v, e_{i+1}, ..., e_n \rangle \ .$$

e) Soit $e_1, ..., e_n$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E. Soit $v \in E$. Montrer l'équivalence

$$e_1, ..., e_n, v \text{ sont linéairement indépendants } \Leftrightarrow v \notin \langle e_1, ..., e_n \rangle \ .$$

f) Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel soit$\mathscr{L} \subseteq \mathscr{G}$ deux familles de vecteurs de E. On suppose $\mathscr{L}$ libre et $\mathscr{G}$ génératrice. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{G}$.

Exercice 4 a) Montrer que la famille

$$X^k, \ k \in \mathbb{N}$$

est une base de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que la famille $\frac{1}{(X-z)^\alpha}$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}_{>0}$ est une base de l'espace vectoriel complexe des fractions rationnelles de degré < 0.

c) Montrer que la famille

$$(x^n)_{n\in\mathbb{N}},\ x \in \mathbb{R}$$

est libre dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Est-ce une base ?

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f_x : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ q \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } q < x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la famille des $f_x, x \in \mathbb{R}$, est libre dans le $\mathbb{Q}-$espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$. En déduire qu'il existe une famille infinie non dénombrable de vecteurs dans le $\mathbb{Q}-$espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

e) Montrer que la famille $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ est libre dans $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel. Est-elle libre dans $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel ?

Exercice 5 a) Montrer que si $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$, alors les applications $ev_{x_i} : \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}$, $P(X) \mapsto P(x_i)$, sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendantes.

b) Montrer que si $x_0, ..., x_{n+1} \in \mathbb{R}$ sont deux à deux distincts, alors il existe $t_0, ..., t_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n},\ P(x_{n+1}) = t_0 P(x_0) + ... + t_n P(x_n)\ .$$

Exercice 6 Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels *c-à-d* : $\forall\, u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in E,\ f(tv) = tf(v)$.

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que si $W \leqslant F$, alors $f^{-1}(W) \leqslant E$.

c) Montrer que si $V \leqslant E$, alors $f(V) \leqslant F$.

En pariculier, $\ker f = f^{-1}(0) \leqslant E$ et $\operatorname{im} f = f(E) \leqslant F$.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soient $l_1, ..., l_m \in E^*$.

a) Soit $l \in E^*$. Montrer que

$$l \in \langle l_1, ..., l_m \rangle \Leftrightarrow \ker l_1 \cap ... \cap \ker l_m \leqslant \ker l\ .$$

b) Montrer que $\langle l_1, ..., l_m \rangle = E^* \Leftrightarrow \ker l_1 \cap ... \cap \ker l_m = 0$.

c) Montrer que la famille $l_1, ..., l_m$ est libre $\Leftrightarrow$ l'application $E \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (l_1(v), ..., l_m(v))$ surjective.