Fiche de TD 3
Familles libres, familles génératrices, bases *(suite)*

Exercice 1 a) Soit v un vecteur dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Montrer que la famille $\{v\}$ est liée $\Longleftrightarrow$ $v = 0$.

b) Soient v_0, v_1 deux vecteurs dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Montrer que la famille $\{v_0, v_1\}$ est liée $\Longleftrightarrow$ v_0, v_1 sont colinéaires.

c) Soient v_0, v_1, v_2 trois vecteurs dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Montrer que la famille $\{v_0, v_1, v_2\}$ est liée $\Longleftrightarrow$ v_0, v_1, v_2 sont coplanaires [†].

Exercice 2 Dénombrements Soit K un corps fini de cardinal q.

a) Combien y a-t-il de vecteurs dans un $K-$espace vectoriel de dimension n ?

b) Combien y a-t-il de bases dans un $K-$espace vectoriel de dimension n ?

c) Combien y a-t-il de sous-espaces de dimension k dans un $K-$espace de dimensio n ?

Indication. Compter d'abord le nombre de familles de k vecteurs $K-$linéairement indépendants ...

Exercice 3 a) Montrer que le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension dénombrable comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel. [‡]

Exercice 4 Les familles de fonctions suivantes sont-elles $\mathbb{R}-$linéairement indépendantes dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

a) 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ..., $\cos nx$, ... ($n \in \mathbb{N}$).

b) 1, $\cos x$, $\cos^2 x$, ..., $\cos^n x$, ... ($n \in \mathbb{N}$).

†. *c-à-d* contenus dans un sous$-\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2.

‡. On peut construire une famille non dénombrable de réels $\mathbb{Q}-$linéairement indépendants de la façon suivante. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une numérotation de $\mathbb{Q}$. On pose pour tout $r \in \mathbb{R}$, $T_r = \sum\limits_{\substack{n \geqslant 0 \\ q_n < r}} \frac{1}{n!}$. Alors les nombres T_r, $r \in \mathbb{R}$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$ ...

c) $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$, ... ($n \in \mathbb{N}_{>0}$).

d) $\sin(x)$, $\sin(x+1)$, $\sin(x+2)$.

e) x^2, $(x+1)^2$, $(x+2)^2$.

f) Montrer que pour tout $n > 0$, $\mathrm{Vect}\{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\} = \mathrm{Vect}\{1, \cos x, \cos^2 x, ..., \cos$

Exercice 5 À propos du wronskien

a) Soient $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x|x|$. Calculer $\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$. Les fonctions f, g sont-elles $\mathbb{R}-$linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

b) Soients $f : x \mapsto \begin{cases} 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$, $g : x \mapsto \begin{cases} 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \\ 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$, $h = 1$.

Calculer $\begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix}$.

Les fonctions f, g, h sont-elles $\mathbb{R}-$linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 6 On pose pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $e_k(X) = 1 + X + ... + \frac{X^k}{k!}$. Soient $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On pose pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$, $P_j(X) = \dfrac{\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} (X - x_i)}{\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} (x_j - x_i)}$.

Montrer que les familles suivantes forment une base de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$.

a) $1, X, ..., X^n$;

b) $1, e_1(X), ..., e_n(X)$;

c) $P_0, ..., P_n$.

Exercice 7 a) Déterminer les réels a tels que la famille de vecteurs $(a, 1, 1, 1)$, $(1, a, 1, 1)$, $(1, 1, a, 1)$, $(1, 1, 1, a) \in \mathbb{R}^4$ est liée.

b) Même question avec les vecteurs $(1, a^2, a)$, $(a, 1, a^2)$, $(a^2, a, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 8 a) Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soient $l_1, ..., l_d \in E^*$. Montrer que le sous-espace vectoriel de E défini par les équations

$$l_1(x) = ... = l_d(x) = 0$$

est de dimension $\geqslant n - d$. *Indication. Commencer par le cas* $d = 1$.

b) Déterminer $\dim \mathbb{R}[X, Y]_{\leqslant n}$ si $n \geqslant 1$. En déduire que par 5 points du plan $\mathbb{R}^2$ passe toujours une conique. †

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts.

a) Montrer que la famille des vecteurs

$$v_0 := (1, x_0, ..., x_0^n),\ ...,\ v_n := (1, x_n, ..., x_n^n)$$

est libre dans $\mathbb{R}^{n+1}$. *Indication. Si* $a_0v_0 + ... + a_nv_n = 0$, *vérifier que* $a_0P(x_0) + ... + a_nP(x_n) = 0$ *pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ ...

b) En déduire que $\forall\, y_0, ...y_n \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ tel que

$$P(x_0) = y_0,\ ...,\ P(x_n) = y_n\ .$$

Exercice 10 Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$. On note r_l le rang des lignes de A et r_c celui des colonnes. ‡

a) Montrer que si $A = BC$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et certaines matrices $B \in \mathscr{M}_{mk}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_{kn}(\mathbb{R})$, alors $r_l \leqslant k$.

b) Montrer *réciproquement* que si $r_l = k \in \mathbb{N}$, alors $A = BC$ pour certaines matrices $B \in \mathscr{M}_{mk}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_{kn}(\mathbb{R})$. En déduire

$$r_l = \min\{k \in \mathbb{N},\ \exists\, B \in \mathscr{M}_{mk}(\mathbb{R}),\ C \in \mathscr{M}_{kn}(\mathbb{R}),\ A = BC\}\ .$$

c) Montrer que $r_l = r_c$.

d) Trouver deux matrices $B \in \mathscr{M}_{32}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$, telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = BC\ .$$

†. Une conique est une courbe d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ pour certains coefficients $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

‡. Le *rang* d'une famille de vecteurs est la dimension du $\mathbb{R}-$espace vectoriel engendré.

Exercice 11 Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ est une fonction, on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$.

On pose $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$. *C'est une fonction polynomiale de degré k.*

a) Calculer $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\Delta\binom{x}{k}$.

b) Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $d \in \mathbb{N}$. Montrer que f est polynômiale de degré $\leqslant d$ [†] $\Longleftrightarrow \Delta^{d+1} f = 0$. *Indication. Raisonner par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$.*

c) Montrer que les fonctions $\binom{x}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ forment une base du sous$-\mathbb{Q}-$espace vectoriel de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des fonctions polynômiales.

d) Montrer que si f est polynomiale de degré $\leqslant d$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(0) + \Delta f(0)n + ... + \Delta^d f(0)n^d$.

e) Exprimer la fonction $n \mapsto 1 + ... + n^3$ comme un polynôme en n.

†. *c-à-d* il existe des coefficients $a_0, ...a_d \in \mathbb{Q}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_d n^d$.