Fiche de TD 5
Représentations matricielles des applications linéaires

Exercice 1 Soit $f : E' \to E$ linéaire. Si e est une base de E et e' une base de E', on note

$$[f]_{e,e'}$$

la matrice de f dans les bases e', e *c-à-d* : si $A = [f]_{e,e'}$, alors

$$\forall\, j,\ f(e'_j) = \sum_i A_{ij} e_i \ .$$

Si $E = E'$ et $e = e'$, on notera simplement $[f]_e = [f]_{e,e}$.

a) Montrer que $[f]_{e,e'}[g]_{e',e''} = [f \circ g]_{e,e''}$ *pour peu que cela ait un sens.*

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer $[f]_e$ où f est la multiplication complexe par $a + ib$ et e est la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel).

c) Si e, e' sont les bases d'un même espace vectoriel E, on note $P_{e,e'} = [\mathrm{Id}]_{e,e'}$ c'est la matrice de passage de la base e dans la base e'. Vérifier que $P_{e,e'}^{-1} = P_{e',e}$. montrer que si $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n = x'_1e'_1 + ... + x'_ne'_n$, alors $X = PX'$ où $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$, $X' = {}^t(x'_1, ..., x'_n)$, $P = P_{e,e'}$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3). Soit $f : E \to E$ l'application linéaire telle que

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3,\ f(e_2) = e_2 + e_3,\ f(e_3) = e_3 \ .$$

a) Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

b) Montrer que f est inversible et donner la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3).

c) Donner la matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1) †.

Exercice 3 Soit r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

a) Donner la matrice de r dans la base canonique.

b) Donner la matrice de r dans la base $e'_1 = 2e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$.

†. *l'ordre a changé !*

c) Écrire la formule de changement de bases dans ce cas.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$.

a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une base de $\ker f$ et une de $\operatorname{im} f$.

c) Donner la matrice de f dans la base $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 1, -1)$.

Exercice 5 Soit E l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$.

a) Déterminer la matrice de la dérivation dans la base $(1, X, ..., X^n)$ et la matrice dans la base $(1, X, ..., \frac{X^n}{n!})$.

b) Écrire la relation entre ces deux matrices obtenue grâce à la formule de changement de bases.

Exercice 6 Si $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & ... & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & ... & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \ .$$

a) Montrer que $V(x_0, ..., x_n)$ est inversible et que c'est la matrice de passage de la base $(1, X, ..., X^n)$ dans la base $(P_0, ..., P_n)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ où pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$P_i = \frac{1}{P'(x_i)} \frac{P}{X - x_i} \ .$$

b) Montrer que $V(1, \omega, ..., \omega^n)^{-1} = \frac{1}{n+1} V(1, \omega^{-1}, ..., \omega^{-n})$ si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$.

Exercice 7 Soit τ la racine > 0 de $X^2 + X - 1$. On pose :

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -\tau^{-1} & 1 \\ \tau^{-1} & 1 & \tau \\ -1 & \tau & \tau^{-1} \end{pmatrix} \ .$$

a) Déterminer, dans la base $u_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $u_2 = {}^t(0, 1, -\tau)$, $u_3 = {}^t(0, \tau, 1)$, la matrice de l'endomorphisme associé à R dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire que la matrice R est d'ordre 5 dans le groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.