Fiche de TD 7
Réduction des endomorphismes *(suite)*

Exercice 1 Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication. Vérifier que le polynôme caractéristique est $\chi_n(X) = U_{n+1}\left(\frac{X-2}{2}\right)$ où pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\sin(lx) = U_l(\cos x)\sin x$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Soient $x_1, ..., x_s$ des nombres complexes distincts et $n_1, ..., n_s$ des entiers tels que $n_1 + ... + n_s = n$. Montrer que l'application linéaire

$$\mathbb{C}[X]_{\leqslant n} \to \mathbb{C}^n,\ P \mapsto (P^{(j)}(x_i)\ :\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i - 1)$$

est un isomorphisme.

b) Calculer A^n pour tout n dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) De même calculer e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 lemme des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.

a) Si P, Q sont premiers entre eux, montrer que

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)\ .$$

b) Montrer que si $D = (P, Q)$, alors $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \ker D(u)$.

Exercice 4 décomposition de Dunford-Jordan

a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (D, N) où D est diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$ et $M = D + N$.

   Indication. Pour l'existence, si $\chi_M(X) = (X-\lambda_1)^{a_1} ... (X-\lambda_s)^{a_s}$ pour certains λ_i distincts et certains entiers $a_i \geqslant 1$, soit $P(X)$ un polynôme tel que $\forall i$, $P(X) = \lambda_i \bmod (X - \lambda_i)^{a_i}$ et poser $D = P(M)$.

b) Montrer que si M est inversible alors il existe D, U tels que $DU = UD$, D diagonalisable, U unipotente[†] et $M = DU$.

c) En déduire que $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

   Indication. Si N est nilpotente, vérifier que

$$\exp\left(N - \frac{N^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{N^{n-1}}{n-1}\right) = I_n + N \ .$$

†. *c-à-d* $U - I_n$ nilpotente.