

Feuille d'exercices n° 1
 RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1.1 Déterminez si chacune des 10 assertions suivantes est vraie ou fausse :

$$\text{L'ensemble des matrices } \left\{ \begin{array}{l} \text{symétriques} \\ \text{inversibles} \\ \text{diagonalisables} \\ \text{nilpotentes} \\ \text{orthogonales} \end{array} \right\} \text{ est stable par } \left\{ \begin{array}{l} \text{somme.} \\ \text{produit.} \end{array} \right\}$$

Exercice 1.2 Déterminer si chacune des matrices suivantes est (a) symétrique (b) inversible (c) diagonalisable (d) nilpotente (e) orthogonale

$$A = I_n, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3 On note \mathcal{L}_n l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ qui sont triangulaires inférieures. Montrer que

1. \mathcal{L}_n est stable pour le produit de matrices,
2. pour tout $A \in \mathcal{L}_n$, $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$,
3. les valeurs propres de $A \in \mathcal{L}_n$ sont les coefficients diagonaux,
4. $A \in \mathcal{L}_n$ est inversible si et seulement si $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
5. si $A \in \mathcal{L}_n$ est inversible, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$ et les coefficients diagonaux de A^{-1} sont a_{ii}^{-1} ,

Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ a_2 & 1 & & & & \\ a_3 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.4 Soient α, β deux nombres réels. Déterminer une matrice orthogonale $O \in \mathbf{O}_2$ et une matrice diagonale D telles que

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1 + \beta^2 \end{pmatrix} = ODO^T$$

Exercice 1.5 Matrices de rang 1

Soient u, v des vecteurs non nuls de \mathbf{C}^n . On note R la matrice $uv^* \in M_n(\mathbf{C})$.

1. Montrer que R est une matrice de rang 1, et que toute matrice de rang 1 est de ce type.
2. Montrer que les valeurs propres de R sont 0 et $\langle u, v \rangle$, et déterminer les sous-espaces propres correspondants.
3. Montrer que R est diagonalisable si et seulement si $\langle u, v \rangle \neq 0$.

Exercice 1.6 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, $x \in \mathbf{C}^n$ et $y \in \mathbf{C}^m$ tels que $y^*Ax \neq 0$. Posons

$$B = A - \frac{Axy^*A}{y^*Ax}.$$

Montrer que

1. $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A) \subset \text{Im}(B) + \mathbf{C}Ax$,
2. $\ker(A) \subset \ker(B)$,
3. $x \in \ker(B)$ et $x \notin \ker(A)$,
4. en déduire que $\text{rang}(B) = \text{rang}(A) - 1$.

Exercice 1.7 Matrice compagnon

Étant donnés n nombres complexes a_0, \dots, a_{n-1} , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice-compagnon* du polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est égal à $(-1)^n P$

Exercice 1.8 Soient x et y deux vecteurs linéairement indépendants de \mathbf{C}^n . On considère la matrice $A = xy^* + yx^* \in M_n(\mathbf{C})$.

1. Montrer que A est hermitienne, de rang 2. Déterminer son image.
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.