

**Feuille d'exercices n° 2**

NORMES MATRICIELLES, CONDITIONNEMENT, VALEURS SINGULIÈRES

Dans tout ce qui suit,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\|\cdot\|$  désigne une norme sur  $\mathbf{K}^n$ ,  $\|\cdot\|$  et  $\text{cond}(\cdot)$  la norme subordonnée et le conditionnement associés.

**Exercice 2.0** *Décomposition en valeurs singulières : échauffement*

Donner la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

1. La matrice identité.
2. Une matrice orthogonale.
3. Une matrice diagonale.
4. Une matrice  $n \times n$  de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

5. Une matrice  $m \times n$  de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6. Soit  $A$  une matrice carrée inversible. Comment s'exprime la décomposition en valeurs singulières de  $A^{-1}$  en fonction de celle de  $A$  ?

**Exercice 2.1** *Changement de base*

Rappel : Représentation matricielle d'une application linéaire.

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, avec  $\dim E = n$  et  $\dim F = m$ . Fixons deux bases,  $\beta = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$  une base de  $E$  et  $\beta' = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$  base de  $F$ .

Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. La matrice de  $u$  relativement aux bases  $\beta$  et  $\beta'$  est la matrice dont le  $j^{\text{e}}$  vecteur colonne contient les coordonnées du vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $\beta'$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

On la note  $\text{Mat}_{\beta, \beta'}(u)$ . Si  $E = F$  et  $\beta = \beta'$ , on la note  $\text{Mat}_{\beta}(u)$ .

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ , soit  $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$  une autre base de  $E$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $(p_{1,j}, \dots, p_{n,j}) \in \mathbf{K}^n$  tel que  $f_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$ .

On appelle *matrice de changement de base de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$* , ou *matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$* , la matrice  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  : la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est constituée des coordonnées de  $f_j \in \mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

1. Soit  $x \in E$ . On note  $X \in \mathbf{K}^n$  le vecteur (colonne) des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $X' \in \mathbf{K}^n$  le vecteur (colonne) des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Montrer que  $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$ .
2. Vérifier que  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  est la matrice de l'application identité de  $E$ ,  $\text{Id}_E$ , relativement aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$  :  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ .
3. Vérifier que  $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$ .
4. Montrer que pour tout endomorphisme  $U$  de  $E$  on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(U) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(U) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(U) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

5. *Application.* Dans  $\mathbf{R}^2$ , on considère les deux bases suivantes :  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$  avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme  $U : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(U) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) *1<sup>re</sup> méthode.* Exprimer  $U(f_1)$  et  $U(f_2)$  en fonction de  $f_1$  et  $f_2$ . En déduire la représentation matricielle de  $U$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- (b) *2<sup>e</sup> méthode.* Donner la matrice de passage  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ . En déduire la représentation matricielle de  $U$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Exercice 2.2** *Décomposition en valeurs singulières.*

1. Donner la décomposition en valeurs singulières  $A = PDQ^T$  (en précisant  $P$ ,  $D$  et  $Q$ ) de

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Donner la décomposition en valeurs singulières de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et tracer dans le plan (de la feuille !) l'image du cercle unité par l'application linéaire associée à  $A$ .

**Exercice 2.3** *Norme de Frobenius.* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On rappelle que la norme de Frobenius est définie par

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que la norme de Frobenius est une norme matricielle et qu'elle est donnée par :

$$\|A\|_F^2 = \text{Tr}(A^*A).$$

2. Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.
3. Montrer que si  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est unitaire,

$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F.$$

4. Montrer que si  $A$  est une matrice normale, de valeurs propres  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , alors

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}.$$

**Exercice 2.4** Normes subordonnées  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$ . On rappelle la définition des normes  $\ell^\infty$  et  $\ell^1$

sur  $\mathbf{K}^n$  : pour tout  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ,  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

On note  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  les normes subordonnées sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  : pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \text{et} \quad \|A\|_1 = \max_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Montrer les deux formules suivantes : pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

**Exercice 2.5** Norme subordonnée à la norme 2.

On rappelle la définition du produit scalaire canonique sur  $\mathbf{K}^n$  et de la norme associée :

pour tout  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ , tout  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  et  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ .

On note  $\|\cdot\|_2$  la norme subordonnée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  : pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,

$$\|A\|_2 = \max_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

1. Montrer que la norme 2 sur  $\mathbf{K}^n$  est invariante par transformation unitaire : si  $U$  est tel que  $U^*U = I_n$ , alors pour tout  $x \in \mathbf{K}^n$ ,  $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^*x\|_2$ .
2. Montrer que la norme 2 subordonnée est invariante par transformation unitaire : si  $U$  est tel que  $U^*U = I_n$ , alors

$$\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

3. Montrer que si  $A$  est une matrice normale, alors  $\|A\|_2 = \rho(A)$ , où  $\rho(\cdot)$  désigne le rayon spectral.
4. Montrer que  $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2}$ .
5. Montrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2.$$

6. *Conditionnement associé à la norme 2.* On suppose  $A$  inversible, on note  $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  le conditionnement associé à la norme 2. Ordonnons  $0 < \mu_1(A) \leq \dots \leq \mu_n(A)$  les racines carrées des valeurs propres de  $A^*A$ , i.e. les valeurs singulières de  $A$ .

(a) Montrer que  $\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$ .

(b) On suppose de plus que  $A$  est une matrice normale et on note  $\sigma(A)$  l'ensemble des valeurs

propres de  $A$ . Montrer que  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}$ .

**Exercice 2.6** *Équivalence des normes et des conditionnements.*

1. Montrer que si deux normes vectorielles  $\|\cdot\|_*$  et  $\|\cdot\|_{\#}$  vérifient  $C_1\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_{\#} \leq C_2\|\cdot\|_*$  pour un couple  $(C_1, C_2)$  de réels strictement positifs alors les normes subordonnées vérifient

$$\frac{C_1}{C_2}\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_{\#} \leq \frac{C_2}{C_1}\|\cdot\|_*.$$

2. En utilisant les formules démontrées aux exercices précédents, montrer les relations suivantes, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Le cas échéant donner les inégalités associées sur les conditionnements.

- (a)  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ .  
 (b)  $\max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq n \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}| \right)$ .  
 (c)  $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_{\infty}$ .  
 (d)  $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$ .  
 (e)  $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_{\infty}\|A\|_1}$ .  
 (f)  $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_p \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_p$  pour  $p = 1$  et  $p = \infty$ .

**Exercice 2.7** *Norme et inversibilité.* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  une matrice inversible,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbf{K}^n$  et  $\|\cdot\|$  la norme subordonnée associée.

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{K}^n$ ,  $\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$ .  
 2. Soit  $E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  une matrice telle que  $\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{K}^n$ ,

$$\|Ax + Ex\| \geq \left( \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\| \right) \|x\|.$$

En déduire que  $A + E$  est inversible.

3. Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si  $A = I_n$  ?

**Exercice 2.8** *Interprétations du conditionnement.* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  une matrice inversible.

1. (a) Soit  $b \in \mathbf{K}^n$  non nul,  $\Delta b \in \mathbf{K}^n$ . Soit  $x \in \mathbf{K}^n$  non nul et  $\Delta x \in \mathbf{K}^n$  tels que  $Ax = b$  et  $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ . Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

- (b) Déterminer deux vecteurs  $b$  et  $\Delta b$  tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

- (c) Montrer de même que si  $Ax = b$  et  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ , alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

puis que l'on peut trouver un vecteur  $b$  non nul, une matrice  $\Delta A$  et un vecteur  $\Delta x$  vérifiant les relations ci-dessus et tels que l'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

2. (a) Montrer (en utilisant les résultats de l'exercice précédent) que pour toute matrice singulière  $B$ , on a

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

- (b) Soit  $u \in \mathbf{K}^n$  tel que  $\|u\|_2 = 1$  et  $\|A^{-1}u\|_2 = \|A^{-1}\|_2$ . On pose  $B_0 = A - \frac{u(A^{-1}u)^*}{\|A^{-1}\|_2^2}$ .

Montrer que  $\|A - B_0\|_2 = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$  et en déduire que

$$\frac{1}{\text{cond}_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \mid B \text{ singulière} \right\}.$$

Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

**Exercice 2.9** *Un exemple.* On note pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système  $A_\varepsilon x = b$  pour  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  puis pour  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$
2. Estimer à l'aide de l'exercice précédent la valeur de  $\text{cond}(A_\varepsilon)$  et comparer à la valeur exacte de  $\text{cond}(A_\varepsilon)$ .