CORRIGÉ CC1 L3 CDAC 18/03/21

2[illegible]

(I) g différentiable car composée de f et d'une application à coordonnées polynomiales. Sa jacobienne s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + 2x\frac{\partial f_1}{\partial z} & -\frac{\partial f_1}{\partial x} + 2y\frac{\partial f_1}{\partial y} + 3y^2\frac{\partial f_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + 2x\frac{\partial f_2}{\partial z} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} + 2y\frac{\partial f_2}{\partial y} + 3y^2\frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(II) Voir exo 12 fiche 1 pour méthode détail

En dehors de la parabole $y=x^2+1$, f est clairement C^1 avec :

$$\left.\begin{matrix}\partial f/\partial x = 0 \\ \partial f/\partial y = 1\end{matrix}\right\} \text{pour } y > x^2+1 \qquad \left.\begin{matrix}2x \\ 0\end{matrix}\right\} \text{pour } y < x^2+1$$

Sur la parabole, 3 cas possibles (mais f jamais différentiable).

$\boxed{\text{si } x>0}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ à droite et 0 à gauche donc non définie

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ———— 0 ——— ————

$\boxed{\text{si } x<0}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ———— $2x$ ——— ————

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ———— 0 ——— ————

$\boxed{\text{si } x=0}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ———— 0 ——— donc bien définie

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ———— 0 ——— donc non définie.

rème:
ts si [illegible]
$y \neq x^2+1$ prop ∂f
reste sur
le de $y=x^2+1$

(III) f différentiable et $Df(I)(H) = 3H/2$.

On vérifie bien que f satisfait les hypothèses du théorème d'inversion locale en I car $Df(I)$ bijective en dim. finie.

Par contre f n'a aucune chance d'être un difféo. global car non injective: $f(0) = f(-2I) = 0$

Barême: 3 pt pour inversion locale + 2 pt pour non-injectivité.

(IV) Pour $f, h \in C^1([0,1])$:

$$G(f+h) - G(f) = \underbrace{h(0) + \int_0^1 [f'^2(t) h(t)] dt + 2\int_0^1 f(t) f'(t) h'(t) dt}_{L_f(h)} + \underbrace{\int_0^1 f(t) h'^2(t) dt}_{R_f(h)}$$

On vérifie que $L_f(h)$ linéaire et continue vis-à-vis de la norme C^1 (car f, f' bornées sur $[0,1]$).

Quant à $R_f(h)$, $|R_f(h)| \leq |f|_{C^1} \cdot |h|^2_{C^1} = o(|h|_{C^1})$.

$\Rightarrow$ On a bien: $\boxed{DG(f)(h) = L_f(h)}$

Barême: 3 pts pour calcul + 2 pt pour justification.

Petits oublis $(h(0))$ tolérés

Oubli de prouver que $L_f(h)$ continue $\Rightarrow$ toléré.