L3 Probabilités — Contrôle du 12 avril 2022.

Exercice 1 :

Soit X de loi géométrique (sur $\mathbb{N}$) de paramètre p.

1) On a

$$P(X \text{ impaire}) = P(\exists k \in \mathbb{N}, X = 2k+1)$$
$$= P\Big(\bigcup_k \{X = 2k+1\}\Big)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) \quad \text{réunion disjointe}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} p\, q^{2k+1}$$
$$= pq \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k$$
$$= pq \times \frac{1}{1-q^2}$$
$$= \frac{q}{1+q} \quad (\text{avec } q = 1-p)$$

2) Soit $Y = \left|\sin\left(\pi \frac{X}{2}\right)\right| \frac{X-1}{2}$.

Soit $\omega \in \Omega$

* Si $X(\omega)$ est impair, alors $Y(\omega)$ est un entier.
* si $X(\omega)$ est pair, alors $Y(\omega) = 0$.

Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{Y = k\} = \{X = 2k+1\}$ est de proba > 0 donc non vide.

Donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

3) $$P(Y=0) = P\left(\sin \frac{\pi X}{2} = 0 \text{ ou } \frac{X-1}{2} = 0\right)$$
$$= P(X \text{ pair ou } X = 1)$$
$$= P(X \text{ pair}) + P(X = 1) \quad \text{réunion disjointe}$$
$$= 1 - P(X \text{ impair}) + P(X=1)$$

On a donc $$P(Y=0) = 1 - \frac{q}{1+q} + pq$$
$$= \frac{1}{1+q} + pq$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(Y = k) = P\left(\left|\sin\left(\pi \frac{X}{2}\right)\right| \cdot \frac{X-1}{2} = k\right)$$
$$= P(X = 2k+1)$$
$$= p\, q^{2k+1}$$

Rem : on peut vérifier que $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(Y=k) = 1$

En effet : $$\sum_{k\in\mathbb{N}} P(Y=k) = \frac{1}{1+q} + pq + \sum_{k=1}^{\infty} p\, q^{2k+1}$$
$$= \frac{1}{1+q} + pq + \frac{pq^3}{1-q^2}$$
$$= \frac{1 + pq + pq^2 + q^3}{1+q}$$
$$= \frac{1+q-q^2+q^2-q^3+q^3}{1+q} = 1$$

4) Y est une variable aléatoire positive, discrète, et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Donc $$E(Y) = \sum_{n \in Y(\Omega)} n\, P(Y=n)$$
$$= \sum_{n \geq 1} n\, p\, q^{2n+1}$$
$$= pq^3 \sum_{n\geq 1} n\, q^{2(n-1)}$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

et $$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$$

Donc $$\sum_{n\geq 0} n\, q^{2(n-1)} = \frac{1}{(1-q^2)^2}$$

On obtient $$E(Y) = \frac{pq^3}{(1-q^2)^2} = \frac{q^3}{(1+q)^2(1-q)}$$

Exercice 2.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi géométrique (p) sur $\mathbb{N}$.

$D = X-Y$, $M = \min(X,Y)$.

1 a) M est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} P(M>j) &= P(X>j \text{ et } Y>j) \\ &= P(X>j) \times P(Y>j) \\ &= \left(P(X>j)\right)^2 \end{aligned}$$

Or $$P(X>j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=j+1}^{\infty} pq^k = \frac{pq^{j+1}}{1-q}$$
$$= q^{j+1}$$

On a donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$$P(M>j) = q^{2j+2}$$

1b) Soit $j \in \mathbb{N}$.
$$P(M=j) = P(M>j-1) - P(M>j)$$

Si $j \geq 1$, on obtient $$P(M=j) = q^{2j} - q^{2(j+1)} = (1-q^2)\, q^{2j}$$

Pour $j=0$, $$\begin{aligned} P(M=0) &= P(X=0 \text{ ou } Y=0) \\ &= P(X=0) + P(Y=0) - P(X=0 \text{ et } Y=0) \\ &= 2p - p^2 \\ &= 2(1-q) - (1-q)^2 \\ &= (1-q)\,(2-(1-q)) = 1-q^2 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(M=j) = (1-q^2)\,(q^2)^j$:

M suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\underbrace{(1-q^2)}_{\in]0,1[}$.

2) a) Soit $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.

Si $i<0$, $$\begin{aligned} \{(D,M)=(i,j)\} &= \{X-Y=i,\ \min(X,Y)=j\} \\ &= \{X-Y=i,\ \underbrace{Y>X}_{\text{car } i<0},\ X=j\} \\ &= \{Y=j-i\} \cap \{X=j\} \end{aligned}$$

Si $i\geq 0$, $$\begin{aligned} \{(D,M)=(i,j)\} &= \{X-Y=i,\ \min(X,Y)=j\} \\ &= \{X-Y=i,\ X\geq Y,\ Y=j\} \\ &= \{X=i+j\} \cap \{Y=j\} \end{aligned}$$

b) (D, M) est à valeurs dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, car M est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et D est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

c) Soit $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Si $i \geq 0$, $P((D,M) = (i,j)) = P(X = i+j, Y = j)$

$$\overset{\text{indép.}}{=} P(X = i+j)\, P(Y = j)$$

$$= p^2 q^{i+2j}$$

Si $i < 0$, $P((D,M) = (i,j)) = P(Y = j-i, X = j)$

$$\overset{\text{indép.}}{=} P(Y = j-i)\, P(X = j)$$

$$= p q^{j-i}\, p q^{j}$$

$$= p^2 q^{2j-i}$$

Dans les 2 cas, on a bien $P((D,M) = (i,j)) = p^2 q^{2j+|i|}$.

3) Soit $i \in \mathbb{Z}$. Par la formule des probas totales,

$$P(D = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P((D,M) = (i,j))$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p^2 q^{2j+|i|}$$

$$= p^2 q^{|i|} \times \frac{1}{1-q^2}$$

$$= \frac{p}{1+q} q^{|i|}$$

4) Soit $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

$$P(D = i)\, P(M = j) = \frac{p}{1+q} q^{|i|} \times (1-q^2)\, q^{2j}$$

$$= p(1-q)\, q^{|i|+2j}$$

$$= p^2 q^{|i|+2j}$$

$$= P((D,M) = (i,j))$$

Donc D et M sont indépendantes.

<u>Exercice 3</u>:

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}xp(1)$.
On note $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les (X_i) sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc Y_n aussi, et la fonction $\max : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ étant borélienne (car continue), Y_n est mesurable de (Ω, Σ) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

Si $y < 0$, $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = 0$

Si $y \geq 0$, $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y)$

$$= P(\forall 1 \leq k \leq n,\ X_k \leq y)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq y\}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(\{X_k \leq y\})$$

Si X est de loi $\mathcal{E}xp(1)$, on a pour tout $y \geq 0$:

$$P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,dx$$
$$= \int_0^y e^{-x}\,dx$$
$$= 1 - e^{-y}.$$

Donc $F_n(y) = (1 - e^{-y})^n$.

2) F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc Y_n admet une densité, qui est égale sur $\mathbb{R}^*$ à F'_{Y_n}.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $F'_{Y_n}(y) = 0$ si $y < 0$

$$F'_{Y_n}(y) = n e^{-y}(1 - e^{-y})^{n-1} \text{ si } y > 0$$

Donc Y_n admet pour densité $y \longmapsto n e^{-y}(1 - e^{-y})^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer que $P\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n]{} 0$

On supposera $\varepsilon \in]0, 1]$.

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - 1\right| \leq \varepsilon\right) = P\left((1-\varepsilon)\ln n \leq Y_n \leq (1+\varepsilon)\ln n\right)$$
$$= F_n((1+\varepsilon)\ln n) - F_n((1-\varepsilon)\ln n)$$
$$= \left(1 - e^{-(1+\varepsilon)\ln n}\right)^n - \left(1 - e^{-(1-\varepsilon)\ln n}\right)^n$$

Lorsque $n \to \infty$, $(1 \pm \varepsilon)\ln n \to +\infty$
donc $e^{-(1\pm\varepsilon)\ln n} \to 0$

On a donc

$$\ln\left(1 - e^{-(1-\varepsilon)\ln n}\right)^n = n \ln\left(1 - e^{-(1-\varepsilon)\ln n}\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} -n\, e^{-(1-\varepsilon)\ln n} = -n^{+\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

Donc $F_n((1-\varepsilon)\ln n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On a également

$$\ln\left(1 - e^{-(1+\varepsilon)\ln n}\right)^n = n \ln\left(1 - e^{-(1+\varepsilon)\ln n}\right)$$
$$\sim -n\, e^{-(1+\varepsilon)\ln n} = \underbrace{-n^{-\varepsilon}}_{\to 0}$$

Donc $F_n((1+\varepsilon)\ln n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

On obtient, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - 1\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ie $P\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $\frac{Y_n}{\ln n}$ tend en proba vers 1.

4) On calcule pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition G_n de $Y_n - \ln n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}$.

$$G_n(z) = P(Y_n - \ln n \leq z)$$
$$= P(Y_n \leq z + \ln n)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } z + \ln n < 0 \\ \left(1 - e^{-(z + \ln n)}\right)^n & \text{si } z + \ln n \geq 0. \end{cases}$$

z est fixé. Pour tout n assez grand, $z+\ln n>0$, donc

$$G_n(z) = \left(1-e^{-(z+\ln n)}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-e^{-(z+\ln n)}\right)\right)$$

$$e^{-(z+\ln n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad \ln\left(1-e^{-(z+\ln n)}\right) \sim -e^{-(z+\ln n)} = -\frac{1}{n}e^{-z}$$

On a donc $G_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-z}}$

$z \mapsto e^{-e^{-z}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire car c'est une fonction continue, croissante et de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
La densité de cette loi est $z \mapsto e^{-z}e^{-e^{-z}}$.

<u>Exercice 4</u>: Soit (U_n) une suite de v.a.i.i.d $\mathrm{Unif}([-1,1])$.
Pour tout n, U_n est de densité $t \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.

1) Soient $-1\leq a \leq b \leq 1$.

Pour tout $n\geq 1$, $P(nU_n \in [a,b]) = P\left(U_n \in \left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right]\right)$

Pour tout n assez grand, on a $\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right] \subset [-1,1]$

donc $P(nU_n \in [a,b]) = \frac{b-a}{2n}$

On en déduit, par le critère de Riemann que

$$\sum_n P(nU_n \in [a,b]) = +\infty.$$

1 b) Les événements $(\{nU_n \in [a,b]\})_n$ sont indépendants

donc on utilise le 2e lemme de Borel-Cantelli, qui permet d'affirmer que:

$$P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \{nU_n \in [a,b]\}\right) = 1$$

Autrement dit: presque sûrement, pour tout N, il existe $n\geq N$ tel que $nU_n \in [a,b]$.
Presque sûrement, l'intervalle $[a,b]$ contient donc une infinité de termes de la suite (nU_n).

1c) Soit $t\in\mathbb{R}$. $A(\omega) = \{nU_n(\omega), n\in\mathbb{N}\}$
Pour tout $\varepsilon>0$, $P(A\cap[t-\varepsilon,t+\varepsilon] \neq \emptyset) = 1$

et $P\left(\forall k\in\mathbb{N}^*, A\cap\left[t-\frac{1}{k},t+\frac{1}{k}\right] \neq \emptyset\right) = 1$

On a donc $P\left(\forall t\in\mathbb{Q}, \forall k\in\mathbb{N}^*, A\cap\left[t-\frac{1}{k},t+\frac{1}{k}\right]\neq\emptyset\right) = 1$.

donc, p.s, (nU_n) est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $a>0$.
Pour tout n assez grand,
$$P(n^2|U_n| \in [0,a]) = \frac{2a}{n^2}$$

Or $\sum_n \frac{2a}{n^2}$ converge donc $\sum_n P(n^2|U_n| \in [0,a]) < \infty$

3) Par le 1er lemme de Borel-Cantelli, on a :

$$P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \{n^2|U_n| \in [0,a]\}\right) = 0$$

On en déduit: $P\left(\bigcup_{a\in\mathbb{N}^*} \bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \{n^2|U_n| \in [0,a]\}\right) = 0.$

En passant au complémentaire :

$$P\Big(\bigcap_{a \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N} \bigcap_{n \geq N} \{ n^2 |U_n| > a \} \Big) = 1$$

ie : presque sûrement, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $n^2 |U_n| > a$.

C'est précisément la définition de la divergence vers $+\infty$ de la suite $(n^2 |U_n|)_n$.