Rapide corrigé de l'examen du 11 mai 2021, 14h-16h L3-Probabilités

Université Claude Bernard, Lyon 1

Barème : 1 point par question sauf pour la question 1 de l'exercice 1.

`Formulaire` : On rappelle la fonction caractéristique d'une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exercice 1. `Un vecteur gaussien`

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien *centré* dans $\mathbf{R}^3$ de matrice de covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la loi de X^2. `On trouve, grâce à la formule de transfert,`

$$P_{X^2}(dy) = 1_{(0,\infty[}(y) \frac{e^{-y/6}}{\sqrt{6\pi y}} dy$$

2. Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, donner la loi de la variable $T = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$. On donnera également l'espérance et la variance de T. `On a`

$$\mathcal{L}(T) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

`avec`

$$\sigma^2 = 3\alpha^2 + \beta^2 + 3\gamma^2 + 4\alpha\gamma + 2\beta\gamma.$$

3. Existe-t-il $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que

$$Var(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0\,?$$

`Etant donné que la matrice` Γ `est définie positive, il n'existe pas un tel triplet.`

4. On note $U = X - Y$ et $V = X + Y - 2Z$. Montrer que le vecteur (U, V) est un vecteur gaussien.

`Le vecteur` (U, V) `est gaussien comme l'image linéaire d'un vecteur gaussien.`

5. Calculer la matrice des covariances du vecteur gaussien (U, V). On trouve

$$\Gamma_{(U,V)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Les variables U et V sont-elles indépendantes ? Oui car les covariances sont nulles et que bien entendu c'est un vecteur gaussien.

Exercice 2. Convergence en loi

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $\theta \in]0,1[$, on définit la suite de variables réelles $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la relation

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = \theta X_{n-1} + U_n. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la variable X_{n-1} est indépendante de U_n. La v.a. X_{n-1} ne dépend que de U_1, U_2, etc. et de U_{n-1}, elle est donc indépendante de U_n.

2. Calculer la fonction caractéristique de X_0, X_1, X_2. On trouve

$$\varphi_{X_0}(t) = 1, \quad \varphi_{X_1}(t) = e^{-t^2/2}, \quad \varphi_{X_2}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}(1+\theta^2)}.$$

3. Calculer la fonction caractéristique de X_n pour tout $n \geq 2$. On trouve par une récurrence,

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}\sum_{i=0}^{n}\theta^{2i}}.$$

4. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on déterminera. On a pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2(1-\theta^2)}},$$

par le théorème de Paul Lévy, on a montré que, en loi,

$$X_n \to \mathcal{N}(0, 1/(1-\theta^2)).$$

Exercice 3. `Un exercice connu`

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires ndépendantes de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité $x \mapsto 1_{[0,\infty[}(x)e^{-x}$, par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Montrer pour tout $a > 1$, on a presque sûrement

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq a.$$

   `On a`

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(X_n \geq a\log n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a},$$

   `ainsi par le lemme de Borel-Cantelli, p.s.,`

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq a.$$

2. En déduite que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1.$$

   `En prenant une suite` $a_p = 1 = 1/p + 1$, `avec` $p \to \infty$, `on montre p.s.,`

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1,$$

   `attention ll faut expliquer un peu plus que ça.`

3. Montrer que presque sûrement

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1.$$

   `On a`

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(X_n \geq \log n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

   `ainsi par le lemme de Borel-Cantelli (attention à l'indépendance), p.s.,`

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1.$$

4. Conclure que

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

   `D'après les deux questions précédentes, c'est évident. Attention à prendre deux ensembles de mesure 1.`

Exercice 4. Le processus de Galton-Waston

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$. On rappelle que sa fonction génératrice est

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k),$$

$s \in [0, 1]$.

1. On suppose que X est bornée. Exprimer $E(X)$ et $Var(X)$ en fonction de fonction de G.
   On a
   $$E(X) = G'(1) \quad \text{et} \quad Var(X) = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1)).$$

2. Soit $q \in [0, 1/3[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ telle que
   $$P(X = 1) = q,$$
   et
   $$P(X = 2) = 2q.$$
   On note $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, le processus de Galton-Watson partant de $Z_0 = 1$ et de loi $\mu = P_X$.
   (a) Calculer $P(X = 0)$, $E(X)$ et $Var(X)$. On a
   $$P(X = 0) = 1 - 3q, \quad E(X) = 5q, \quad Var(X) = 9q - 25q^2.$$
   (b) Quelle est la probabilité d'extinction de ce processus de Galton-Watson ? On a
   $$G(s) = 1 - 3q + qs + 2qs^2.$$
   Et $G(s) = s$ est équivalent à $s = 1$ ou bien
   $$s = \frac{1 - 3q}{2q}.$$
   Il faut voir où se trouve le plus petit point fixe. Donc la probabilité d'extinction est $\frac{1-3q}{2q}$ si $q \in [1/5, 1/3[$ et est égale à 1 si $q \in [0, 1/5]$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$E(Z_n) = E(X)^n.$$
   On a
   $$E(Z_n) = E(\sum_{i=0}^{Z_{n-1}} \xi_{i,n}) = \sum_{k\in\mathbf{N}} E(1_{Z_{n-1}=k} \sum_{i=0}^{Z_{n-1}} \xi_{i,n}) = \sum_{k\in\mathbf{N}} E(1_{Z_{n-1}=k} \sum_{i=0}^{k} \xi_{i,n}).$$
   donc
   $$E(Z_n) = E(X) \sum_{k\in\mathbf{N}} P(Z_{n-1} = k)k = E(Z_{n-1})E(X),$$
   d'où le résultat. On a utilisé ici le théorème de Fubini-Tonelli, la définition du processus de Galton-Watson, l'indépendance de Z_{n-1} avec les variables $\xi_{i,n}$, $i \in \mathbf{N}$.
   (d) En déduire, en fonction de q et n, la valeur de $E(Z_n)$. On a pour finir,
   $$E(Z_n) = (5q)^n.$$