Feuille de TD 1

Lois, théorème de transfert

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1
Soit $X : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$ une v.a. de loi $\mathbb{P}_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.

1. Calculer $\mathbb{E}(|X|)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X^n)$ existe et calculer sa valeur.
3. Soit $n \geq 1$ un entier fixé, on note $Y = X^n + 1$. Déterminer la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y^2)$.

Exercice 2 Lois uniformes
Soit $U : \Omega \longrightarrow [a, b]$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_U(\mathrm{d}x) = \alpha \mathbf{1}_{[a,b]}\mathrm{d}x$ pour un certain $\alpha > 0$, où $\mathrm{d}x$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On dit que U a pour loi la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Calculer α.
2. Calculer l'espérance et la variance de U.

Exercice 3
Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ de loi uniforme (c'est-à-dire que $\mathbb{P}_U$ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$). Donnez la loi de la v.a. $X = (-2) \times \mathbf{1}_{[0,1/3]}(U) + \mathbf{1}_{]1/3,1]}(U)$.

Exercice 4 [Espérances et variances des lois usuelles]
Dans chacun des cas suivants, vérifier qu'on définit bien une variable aléatoire X, et calculer son espérance et sa variance.

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$:
$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p,$$
2. Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$:
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$
3. Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$:
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$
4. Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:
$$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
5. Exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\mathbb{P}_X(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer la probabilité que X soit paire.
2. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}(e^{-tX})$.
3. On pose
$$Z = |\cos(\pi X/2)|.(X/2)$$
Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 6

Soit Z une variable aléatoire positive.

1. On suppose que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n)$.
2. $(*)$ On ne suppose plus que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n) \leq \mathbb{E}(Z) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n).$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit intégrable.

Exercice à rendre avant le 14/02/22

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{E}(X^n)$.