Feuille de TD 2
Indépendance

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1
Soient $X, Y, Z : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de lois $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Z = (1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_1$. Soit

$$A_1 := \{Y = Z\},\ A_2 := \{Z = X\},\ A_3 := \{X = Y\}.$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 2

1. Soient A_1, A_2, A_3 des événements. Montrer que A_1, A_2, A_3 sont indépendants ssi A_1^c, A_2^c, A_3^c sont indépendants.
2. $(*)$ Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants ssi $A_1^c, \ldots, A_n^c$ sont indépendants.

Exercice 3 [Stabilité par somme]
Soient X, Y deux v.a. indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ dans les cas suivants.

1. $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$
2. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$,

Exercice 4
Soit $U : \Omega \longrightarrow [0,1]$ une variable aléatoire de loi uniforme. On pose

$$X = -\mathbf{1}_{[0,1/4[}(U) + \mathbf{1}_{[1/4,1/2[}(U),\ \ X' = -\mathbf{1}_{[1/2,3/4[}(U) + \mathbf{1}_{[3/4,1]}(U) \text{ et } A = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = X'(\omega)\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$, puis que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.
2. Etablir que $\mathbb{E}[XX'] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X']$.
3. Montrer que les variables aléatoires X et X' ne sont pas indépendantes.

Exercice 5 Loi d'un couple de v.a.

1. Soient X, Y, X', Y' des v.a. telles que $(X, Y) \overset{\text{loi}}{=} (X', Y')$. Est-il vrai que $X \overset{\text{loi}}{=} X'$ et $Y \overset{\text{loi}}{=} Y'$? Que pensez-vous de la réciproque ?
2. Donner toutes les lois possibles d'un couple de v.a. (X, Y) tel que X et Y sont des variables de loi de Bernoulli$(1/2)$.

Exercice 6
Soit X une v.a. indépendante d'elle même. On va démontrer qu'elle est une constante $\mathbb{P}$-p.s.

1. Soit $I_n = [n, n+1[$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\mathbb{P}(X \in I_n) = 1.$$
En déduire que $\mathbb{E}[X]$ existe.
2. Soit $c = \mathbb{E}[X]$, montrer que
$$\mathbb{E}[(X-c)^2] = 0.$$
En déduire que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Exercice 7

Soit X, Y deux v.a. indépendantes. Soit $p > 0$ un réel donné, $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'équivalence suivante :
$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}[|X-a|^p] < \infty.$$
2. $(*)$ Si $\mathbb{E}[|X+Y|^p] < \infty$, montrer que
$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty.$$
3. (Indication : $\forall x, y \geq 0$, $(x+y)^p \leq 2^p(x^p + y^p)$.)

Exercice à rendre avant le 28/02/21

On lance n fois un dé à 6 faces (ce qu'on modélise par $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$). Soit Y le nombre de lancers donnant un nombre pair, Y' le nombre de lancers donnant un nombre impair et Z le nombre de lancers donnant 2. Les variables Y et Y' sont-elles indépendantes ? Et les variables Y et Z ?