Feuille de TD 8
Vecteurs Gaussiens

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 2
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien *centré* dans $\mathbb{R}^3$ de matrice de covariances

$$\cancel{\Gamma = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 8 & 10 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Recommencez l'exercice avec celle-ci !

Cette matrice n'est pas une matrice positive !

1. Donner la loi de X^2.
2. Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, donner la loi de la variable $T = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$. On donnera également l'espérance et la variance de T.
3. Le vecteur (X, Y, Z) admet-il une densité ? Si oui la calculer.

Exercice 3
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien d'espérance $(1, 0, 1)$ et de variance

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi du vecteur $U := (X+Y, X+Z)$.
2. Trouver une matrice A telle que les composantes du vecteur AU soient indépendantes.

Exercice 4
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soient aussi $m \in \mathbb{R}^2$ et $\Sigma \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice M et un vecteur V tel que

$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + V$$

suivent une loi $\mathcal{N}(m, \Sigma)$.

Exercice à rendre pour le 9 Mai
Soient $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ et (X, Y) un vecteur gaussien de covariance $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et d'espérance $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de $(aX + bY, bX - aY)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Trouver a et b non nuls tels que $aX + bY$ et $bX - aY$ soient indépendantes.