Université Claude Bernard
Année universitaire 2020 – 2021

Licence de Mathématiques
PROBABILITES

Correction du Partiel du 6 avril 2021 - Durée : 2 heures

Exercice 1 `Calcul de loi.`

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire de loi $P_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, e^{-|x|}\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
   On a $\int e^{-|x|}dx = 2$ donc $\alpha = 1/2$.
2. Donner l'espace d'arrivée de $Y = X^2$ et déterminer sa loi.
   L'espace d'arrivée est bien entendu $[0, \infty[$.
   Et si ϕ est une fonction test, on a
   $$E(\phi(Y)) = E(\phi(X^2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x^2)e^{-|x|}\frac{dx}{2} = \int_0^{\infty} \phi(x^2)e^{-|x|}dx$$
   Soit donc après le changement de variable $y = x^2$,
   $$E(\phi(Y)) = \int_0^{\infty} \phi(y)e^{-\sqrt{y}}\frac{dy}{2\sqrt{(y)}}.$$
   Ainsi la loi de Y est $1_{[0,\infty[}(y)e^{-\sqrt{y}}\frac{dy}{2\sqrt{y}}$.
3. Soit Z une variable aléatoire ayant même loi que X et indépendante de X. Expliciter la loi du couple (Y, Z).
   Les variables Y et Z sont indépendantes, donc la loi du couple est
   $$1_{[0,\infty[}(y)e^{-\sqrt{y}-|x|}\frac{dydx}{4\sqrt{y}}.$$

Exercice 2 `Loi de Pareto.`

Soit $\alpha, r > 0$. On considère la densité de Pareto
$$f_{\alpha,r}(x) = \alpha r^{\alpha} x^{-\alpha-1} 1_{]r,\infty[}(x)$$

1. On suppose que la variable X suit une loi de Pareto de paramètres (α, r). Donner les conditions sur (α, r) pour que l'espérance de X existe.
   On a par les comparaisons habituelles, $E(|X|) < \infty$ si et seulement si $r > 0$ et $\alpha > 1$.
2. Même question pour la variance.
   On a par les comparaisons habituelles, $E(X^2) < \infty$ si et seulement si $r > 0$ et $\alpha > 2$.

3. Déterminer la loi de $Y = \log(X/r)$.
   Soit ϕ une fonction test, on a
$$E(\phi(Y)) = E(\phi(\log(X/r))) = \int_r^\infty \phi(\log(x/r))\alpha r^\alpha x^{-\alpha-1}dx.$$
   Posons $y = \log(x/r)$, l'intégrale devient,
$$E(\phi(Y)) = \int_0^\infty \phi(y)\alpha e^{-\alpha y}dy,$$
   donc la loi de Y est $1_{[0,\infty[}\alpha e^{-\alpha y}dy$, une loi exponentielle de paramètre α.
4. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ un échantillon de loi de Pareto de paramètres (α, r). Pour tout $i \in \mathbf{N}$ on pose $Y_i = \log(X_i/r)$. En déduire que la suite de variable aléatoire
$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$
   converge presque sûrement vers une limite que l'on calculera (penser à passer au logarithme).
   On a
$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}} = r\exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i),$$
   où $Y_i = \log(X_i/r)$.
   Par la loi forte des grands nombres, on sait que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ converge presque sûrement vers $E(Y_1) = 1/\alpha$. Puisque la fonction exponentielle est continue on a presque sûrement,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}} = re^{1/\alpha}.$$

Exercice 3 `Calcul de loi, encore.`

Notations : pour $x \in \mathbf{R}_+$, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier k tel que $k \le x < k+1$.
Dans la suite, on désigne par X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

1. On pose $Y = [X]$ et $Z = X - Y$.
   Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires réelles et que Z est intégrable quelque soit la loi de X.
   On a $Z = X - Y$.
   On commence par montrer que Y est une variable aléatoire. Puisque $Y \in \mathbf{N}$ il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(Y = k)$ est dans $\mathcal{F}$. En effet on a
$$\{Y = k\} = X^{-1}([k, k+1])$$

qui est bien dans $\mathcal{F}$. Ainsi Y est une variable aléatoire. De plus, $Z = X - Y$ est la différence entre deux variables aléatoires, ainsi Z est une variable aléatoire.

On a $Z \in [0,1]$, donc Z est intégrable et bornée.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $X : \Omega \to [0,n[$ une variable aléatoire dont la loi a pour densité f_X.

   (a) Exprimer la loi de Y à partir de f_X.

   Notons que Y est une variable aléatoire discrète, soit donc déterminée par les $P(Y = k)$ pour $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Pour un tel k, on a

$$P(Y = k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} f_X(u)du$$

   ainsi

$$P_Y = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_k^{k+1} f_X(u)du \Big) \delta_k$$

   (b) Prouver que la loi de Z a une densité f_Z, que l'on peut exprimer sous la forme

$$f_Z(z) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f_X(z+k) \Big) \mathbf{1}_{[0,1]}(z).$$

   On prend une fonction test ϕ,

$$E(\phi(Z)) = E(\phi(X - [X])) = \int_0^n \phi(x - [x]) f_X(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \phi(x-k) f_X(x)dx$$

   donc par changement de variables,

$$E(\phi(Z)) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \phi(z) f_X(k+z)dz = \int \phi(z) \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f_X(k+z) \Big) dz$$

   Ainsi la loi de Z est

$$1_{[0,1]}(z) \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f_X(k+z) \Big) dz.$$

   (c) Que donnent (a) et (b) quand X est de loi uniforme sur $[0,n]$?

   Si X est une variable uniforme sur $[0,n]$ alors sa densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{n} 1_{[0,n]}(x).$$

   La loi de Y est alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \delta_k$$

   et la loi de Z est

$$1_{[0,1]}(z)dz,$$

   donc Z suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 4 `Convergences`

Dans cette exercice, on se place dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, quelconque. Soit (α_n) une suite de réels dans $]0, 1/2[$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire réelle Y_n sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que

$$P(Y_n = n) = P(Y_n = -n) = \alpha_n$$

et

$$P(Y_n = 1/\sqrt{2n}) = 1 - 2\alpha_n.$$

1. Calculer et tracer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n.
   On a $F_{Y_n}(x) = 0$ pour $x < -n$, $F_{Y_n}(x) = \alpha_n$, pour $-n \leq x < 1/\sqrt{2n}$, $F_{Y_n}(x) = 1 - \alpha_n$ pour $1/\sqrt{2n} \leq x < n$ et $F_{Y_n}(x) = 1$ pour $x \geq n$.
2. On supposer que la suite α_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Calculer la limite en loi de la suite de variables aléatoires (Y_n) que l'on notera Z.
   Soit ϕ ne fonction continue et bornée alors
   $$E(\phi(Y_n)) = \phi(n)\alpha_n + \phi(-n)\alpha_n + \phi(1/\sqrt{2n})(1 - 2\alpha_n).$$
   Puisque ϕ est continue et bornée, on a
   $$\lim_{n\to\infty} = \phi(0),$$
   donc (Y_n) converge en loi vers la variable aléatoire $Z = 0$.
3. Soit $\epsilon > 0$, calculer $P(|Y_n - Z| \geq \epsilon)$.
   Puisque $Z = 0$, on a
   $$P(|Y_n - Z| \geq \epsilon) = P(|Y_n| \geq \epsilon) = 1$$
   si $n \leq 1/(2\epsilon^2)$ et
   $$P(|Y_n - Z| \geq \epsilon) = P(|Y_n| \geq \epsilon) = 2\alpha_n$$
   si $n > 1/(2\epsilon^2)$.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite (α_n) pour que (Y_n) converge en probabilité vers Z.
   Ainsi, d'après la question précédente, (Y_n) converge en probabilité vers Z si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.
5. Déterminer **une condition suffisante** sur la suite (α_n) pour que la suite (Y_n) converge presque sûrement vers Z.
   Ainsi, d'après la question 3 et d'après le critère du cours sur la convergence presque sûre, dès que
   $$\sum_{n\geq 1} \alpha_n < \infty$$
   alors (Y_n) converge presque sûrement vers 0.

6. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite (α_n) pour que (Y_n) converge vers Z dans L^2, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} E((Y_n - Z)^2) = 0.$$

Puisque $Z = 0$, on a

$$E(Y_n^2) = 2n^2\alpha_n + (1-\alpha_n)/(2n),$$

donc (Y_n) tend vers 0 dans L^2 si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} n^2\alpha_n = 0.$$