Exercice 1 X, Y indépendantes et de loi exponentielle de paramètre respectivement λ et μ.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $F_X(x) = P(X \leq x)$
$$= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\, dt$$

D'où : Si $x < 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

Si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$
$$= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

De la même façon, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Remarque : X et Y sont à valeurs positives : $P(X<0) = 0$, $P(X \geq 0) = 1$.
Leurs fonctions de répartitions sont donc nulles sur $\mathbb{R}^-$

2) Pourquoi Z est bien une v.a :
Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a
$$\{Z \leq z\} = \{\min(X,Y) \leq z\}$$
$$= \{X \leq z \text{ ou } Y \leq z\}$$
$$= \{X \leq z\} \cup \{Y \leq z\}$$

Donc $\{Z \leq z\}$ est la réunion de 2 événements, donc c'est un événement.
Donc Z est bien une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
Donc c'est une variable aléatoire.

Remarques : * Étudier les événements $\{Z \in B\}$ pour tout borélien B est beaucoup plus compliqué !

* on peut aussi utiliser le fait que la fonction $\min : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une
$$(x,y) \mapsto \min(x,y)$$
fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, donc borélienne.

2) Soit $Z = \min(X, Y)$.

On détermine la fonction de répartition de Z :

Pour tout $z \leq 0$, $P(Z \leq z) = 0$

Soit $z > 0$: $\{\min(X,Y) \leq z\} = \{X \leq z\} \cup \{Y \leq z\}$

Ces deux événements ne sont pas disjoints.

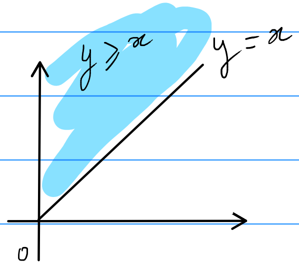
On a donc
$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(X \leq z) + P(Y \leq z) - P(\{X \leq z\} \cap \{Y \leq z\}) \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - P(X \leq z)\, P(Y \leq z) \quad \text{(indépendance)} \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)\, F_Y(z) \end{aligned}$$

On obtient : $P(Z \leq z) = 1-e^{-\lambda z} + 1-e^{-\mu z} - (1-e^{-\lambda z})(1-e^{-\mu z})$

$= 1 - e^{-(\lambda+\mu) z}$.

Donc Z suit la loi exponentielle de paramètre $(\lambda+\mu)$ (et d'espérance $1/(\lambda+\mu)$).

3) $P(Z = X) = P(X \leq Y)$



$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \leq Y})$

$= \iint \mathbb{1}_{x \leq y} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \, dx dy$

$= \left(\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx$

$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x} dx = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

4) S est une variable aléatoire de densité $f_S = f_X * f_Y$ (résultat du cours).

S est positive.

Soit $s \geq 0$.

$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ s-x \geq 0 \end{matrix}\right\} 0 \leq x \leq s$

$f_S(s) = \int_{-\infty}^{s} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0} \mu e^{-\mu(s-x)} \mathbb{1}_{s-x \geq 0} \, dx$

$= \lambda\mu e^{-\mu s} \int_0^s e^{(\mu-\lambda)x} dx$

$\lambda \neq \mu$ $\quad = \lambda\mu e^{-\mu s} \left[\dfrac{1}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)x} \right]_0^s \quad (\lambda \neq \mu)$

$= \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\mu s} \left(e^{(\mu-\lambda)s} - 1 \right)$

$= \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left(e^{-\lambda s} - e^{-\mu s} \right)$

Sur $\mathbb{R}$: $f_S : s \longmapsto \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \left(e^{-\lambda s} - e^{-\mu s} \right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(s)$

Si $\lambda = \mu$: on obtient, pour tout $s \geq 0$:

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s dx$$

$$= \lambda^2 s e^{-\lambda s}$$

Donc $f_S : s \mapsto \lambda^2 s e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(s)$.

Exercice 2

$\lambda > 0$. (X_i) v.a.i.i.d $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

1) $\lfloor X_1 \rfloor$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P(\lfloor X_1 \rfloor = n) = P(n \leq X_1 < n+1)$$

$$= \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)}$$

$$= (1 - e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})^n$$

$\lfloor X_1 \rfloor$ suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.

2) Soit $n \geq 1$. $\max_{i \leq n} (X_i)$ est une v.a. à valeurs positives.

Pour la mesurabilité : cf exercice 1.2.

Soit $x \geq 0$

$$P(\max_{i \leq n} X_i \leq x) = P(\forall i \leq n, \; X_i \leq x)$$

$$= P\left(\bigcap_{i \leq n} \{X_i \leq x\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x)$$

$$= (1 - e^{-\lambda x})^n$$

et $P(\max_{i \leq n} X_i < x) = 0$ si $x \leq 0$.

La fonction de répartition de $\max\limits_{i \leq n} X_i$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc cette v.a admet une densité et une expression de cette densité est :

$$x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad n \quad e^{-\lambda x} \quad \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1}$$

3) $\min\limits_{i \leq n} (X_i)$ est une v.a. à valeurs positives. On calcule sa fonction de répartition.

Soit $x \geq 0$. $P\left(\min\limits_{i \leq n} X_i \leq x\right)$

$$= 1 - P\left(\min_{i \leq n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - P\left(\forall i \leq n, \; X_i > x\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i \leq n} \{X_i > x\}\right)$$

indépendance

$$= 1 - \left(P(X_i > x)\right)^n$$

$$= 1 - \left(e^{-\lambda x}\right)^n \qquad (x \geq 0)$$

$$= 1 - e^{-\lambda n x}$$

Donc $\min\limits_{i \leq n} (X_i)$ suit la loi $\mathcal{E}xp(\lambda n)$ $\left(\text{d'espérance } \dfrac{1}{n\lambda}\right)$

Exercice 3 Soient X et Y 2 v.a indépendantes de loi Géom de paramètre respectif p et p'.

$\min(X,Y)$ est une v.a. à valeurs entières positives (donc discrète).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P(\min(X,Y)=n) = P((X=n \text{ et } Y \geq n) \text{ ou } (X>n \text{ et } Y=n))$$ év. disjoints

$$= P((X=n)\cap(Y\geq n)) + P((X>n)\cap(Y=n))$$

$$= P(X=n)\,P(Y\geq n) + P(X>n)\,P(Y=n)$$

Or $P(X=n) = p(1-p)^n$, $P(Y=n) = p'(1-p')^n$

$$P(Y\geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p'(1-p')^k = \frac{p'(1-p')^n}{1-(1-p')} = (1-p')^n$$

et $P(X>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^k = (1-p)^{n+1}$

Donc $P(\min(X,Y)=n) = p\,(1-p)^n(1-p')^n + p'(1-p')^n(1-p)^{n+1}$

$$= (1-p)^n(1-p')^n\,(p+p'-pp')$$

$$= (p+p'-pp')\,(1-(p+p'-pp'))^n$$

donc $\min(X,Y)$ suit la loi géométrique de paramètre $p+p'-pp'$.

2) Même type de stabilité que pour les lois géométriques.

Exercice 4 (Loi de Pareto)

1a) Soit $Z \sim \mathcal{E}xp(a)$ $(a>0)$ et $X = e^Z$.

X est à valeurs dans $[1, +\infty[$, et c'est bien une v.a car $X = \exp \circ Z$, avec $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et Z $\Omega \to \mathbb{R}$ mesurable.

Soit $t \geq 1$.

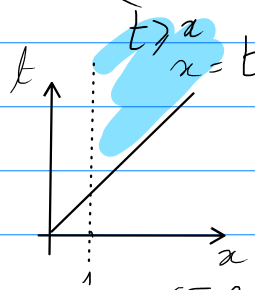
$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(e^Z \leq t)$$
$$= P(Z \leq \ln t) \qquad (\ln \geq 0)$$
$$= 1 - e^{-a \ln t}$$
$$= 1 - \frac{1}{t^a}.$$

et pour tout $t < 1$, $P(X \leq t) = 0$.

1b) F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc X admet une densité. En dérivant F_X, il vient $f_X : t \mapsto +a\, t^{-a-1} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$

2) Soient X et Y indépendantes, de loi de Pareto(a)
Soit $V = XY$.
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée.

$$E(h(V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(xy)\, a^2 (xy)^{-a-1} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)\, dx\, dy$$



$$= \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} h(xy)\, a^2 (xy)^{-a-1}\, dy\, dx$$

$t = xy$
$y = \frac{t}{x}$
$dy = \frac{1}{x} dt$

$$= \int_1^{+\infty} \int_x^{+\infty} h(t)\, a^2 t^{a-1} \frac{dt}{x}\, dx$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_1^{+\infty} \int_1^{t} h(t)\, a^2 t^{a-1} \frac{dx}{x}\, dt$$

$$E(h(V)) = \int_1^{+\infty} h(t)\ a^2 t^{a-1} \ln t \ dt$$

Exercice 5

Soit X de densité $x \mapsto \frac{2}{\lambda^2} x\, e^{-(x/\lambda)^2}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$, avec $\lambda > 0$.

1) • Pour tout $x < 0$, $F_X(x) = P(X \leq 0) = 0$.

• Soit $x \geq 0$.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\lambda^2} \quad e^{-(t/\lambda)^2} \quad \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\, dt$$

$$= 0 + \int_0^x \frac{2}{\lambda^2}\, t\, e^{-t^2/\lambda^2} dt \quad \text{(de la forme } -u'e^u)$$

$$= \left[-e^{-t^2/\lambda^2} \right]_0^x = 1 - e^{-x^2/\lambda^2}$$

On en déduit $P(X^2 \leq 1) = P(X \leq 1) = 1 - e^{-1/\lambda^2}$

2) Y est une v.a car $x \mapsto x^2$ est borélienne, et elle est à valeurs positives.

Soit $y \geq 0$.

$$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(0 \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= 1 - e^{-y/\lambda^2}.$$

et Pour tout $y < 0$, $P(Y \leq y) = 0$.

Y suit la loi exponentielle $(1/\lambda^2)$.

3) Soit $Z = -\log X$.

Z est bien définie car $X > 0$

et Z est mesurable car $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

et $-\log : (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ le sont.

Soit $z \in \mathbb{R}$.

$$P(Z \leq z) = P(-\log X \leq z)$$

$$= P(X \geq \underbrace{e^{-z}}_{\geq 0})$$

$$= e^{-e^{-z}/\lambda^2}$$

Sa densité est $z \longmapsto \dfrac{e^{-z}}{\lambda^2} e^{-e^{-z}/\lambda^2}$

et $\mathbb{P}_Z(dz) = \dfrac{e^{-z}}{\lambda^2} e^{-e^{-z}/z^2} dz$.

Exercice 6 $\quad \forall x \geq 1,\ P(Z > x) = P(Z < -x)$ et $P(|Z| > x) = x^{-2}$

La fonction $x \longmapsto P(|Z| > x)$ est bien décroissante, et on a, pour tout $x \geq 1$:

$$P(Z > x) = \frac{1}{2} P(|Z| > x) = \frac{1}{2} x^{-2},$$

donc $\quad P(Z \leq x) = 1 - \frac{1}{2} x^{-2}$

On a également $P(Z < -x) = \frac{1}{2} x^{-2}$

ie $\forall x \leq -1,\ P(Z < x) = \frac{1}{2} x^{-2}$.

La fonction de répartition de Z est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, donc Z admet une densité et une expression de cette densité est :

$$x \longmapsto -x^{-3} \mathbb{1}_{]-\infty,-1]} + x^{-3} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$$

$$= |x|^{-3} \mathbb{1}_{|x| > 1}$$

Exercice 7

1) Soit X une v.a intégrable.

Par définition de l'intégrale.

$\left(\int_{|X|\leq M} |X|\,dP\right)$ est croissante et converge vers $\int_\Omega |X|\,dP$

donc $\int_{|X|>M} |X|\,dP = \int_\Omega |X|\,dP - \int_{|X|\leq M} |X|\,dP$

converge vers 0 lorsque $M \to +\infty$.

2) Soit X intégrable et $\Lambda_n \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Lambda_n) \to 0$

$\forall \omega$, $\left(|X(\omega)|\, \mathbb{1}_{\Lambda_n^c}(\omega)\right)_n$ tend vers $|X|(\omega)$ (p.s)

et $\forall \omega$, $|X|(\omega)\mathbb{1}_{\Lambda_n^c}(\omega) \leq |X(\omega)|$, avec $|X|$ intégrable.

donc $\int_\Omega |X|\, \mathbb{1}_{\Lambda_n^c}\, dP$ tend vers $\int_\Omega |X|\, dP$

et $\int_\Omega |X|\, \mathbb{1}_{\Lambda_n}\, dP$ tend vers 0.

Exercice à rendre

Soient X, Y de loi de Pareto de paramètre $a > 0$.
ie de densité $t \mapsto a\, t^{-a-1} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$.

a) $t \mapsto a\, t^{-a-1+k} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et est intégrable en $+\infty$ ssi $-a-1+k < -1$ ie $k < a$.

Or $$E(|X|^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k\, a\, x^{-a-1} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\, dx$$
$$= \int_1^{+\infty} a\, x^{-a-1+k}\, dx$$

Donc X^k est intégrable ssi $k < a$

b) Dans ce cas, $$E(X^k) = \int_1^{\infty} a\, x^k\, x^{-a-1}\, dx$$
$$= a \int_1^{+\infty} x^{k-a-1}\, dx$$
$$= \frac{a}{k-a} \left[x^{k-a} \right]_1^{+\infty}$$
$$= \frac{a}{a-k}.$$

2) X et Y sont indépendantes et de loi de Pareto.
$W = \min(X, Y)$ est une v.a car la f° $\min : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue donc borélienne.
Elle est à valeurs dans $[1,+\infty[$.

Soit $z \geqslant 1$

$$P(W > z) = P((X > z) \cap (Y > z)) \quad \text{indép.}$$
$$= P(X > z)\, P(Y > z)$$

Or $P(X > z) = P(Y > z) = z^{-a}$

Donc $P(W > z) = z^{-2a}$ et $P(W \leq z) = 1 - z^{-2a}$

Pour tout $z \leq 1$, on a $P(W \leq z) = 0$

On remarque donc que W suit la loi de Pareto de paramètre $2a$.