
Contrôle partiel: Correction.

Exercice 1. (4 pts) On admet que la quantité définie pour tout $f \in C^2([0,2])$ par

$$\|f\| := \sup_{t\in[0,2]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,2]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,2]} |f''(t)|.$$

fournit une norme sur $C^2([0,2])$.
Montrer que la fonction $G : (C^2([0,2]), \| \,.\, \|) \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(f) = f(1)f''(1) + \int_0^2 f'^2(t)dt,$$

est différentiable sur l'ensemble de son domaine de définition, et calculer sa différentielle.

Correction. Soit $f \in C^2([0,2])$. On va montrer que G est différentiable en f, et que pour tout $g \in C^2([0,2])$,

$$DG(f)(g) = f(1)g''(1) + g(1)f''(1) + 2\int_0^2 f'(t)g'(t)dt.$$

Nommons $L : C^2([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par la formule ci dessus, c'est à dire pour tout $g \in C^2([0,2])$,

$$L(g) := f(1)g''(1) + g(1)f''(1) + 2\int_0^2 f'(t)g'(t)dt.$$

Montrons en premier lieu que L est continue. Pour tout $g \in C^2([0,2])$, on a

$$\begin{aligned}
|L(g)| &\le |f(1)||g''(1)| + |g(1)||f''(1)| + 2\int_0^2 |f'(t)||g'(t)|dt \\
&\le \|f\|\|g\| + \|f\|\|g\| + 2\int_0^2 \|f\|\|g\|dt \\
&\le 6\|f\|\|g\|.
\end{aligned}$$

Donc L est continue, et

$$\|L\|_{\mathcal{L}(C^2([0,2]),\mathbb{R})} \le 6\|f\|.$$

Montrons maintenant que $DG(f) = L$. On a pour tout $g \in C^2([0,2])$:

$$\begin{aligned}
G(f+g) &= \big(f(1)+g(1)\big)\big(f''(1)+g''(1)\big) + \int_0^2 \big(f'(t)+g'(t)\big)^2 dt \\
&= G(f) + L(g) + G(g).
\end{aligned}$$

Or par le même calcul que plus haut avec $f = g$, on voit que

$$|G(g)| \le 3\|g\|^2 = \underset{\|g\|\to 0}{o}(\|g\|).$$

On en conclut que

$$G(f+g) = G(f) + L(g) + \underset{\|g\|\to 0}{o}(\|g\|),$$

c'est à dire que G est différentiable en f, avec $DG(f) = L$.

Exercice 2. (4 pts) Etudier la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction donnée en dehors de l'origine par

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

et prolongée par continuité en $(0,0)$. Cette fonction est-elle de classe C^1 ?

Correction. D'abord, montrons que l'on peut prolonger par continuité f en $(0,0)$, par la valeur 0. Pour ce faire, on pose $f(0,0) = 0$, et on montre que f ainsi prolongée est continue. Pour cela, il suffit de remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^4 + y^4 \leq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2.$$

Du coup, comme f est évidemment positive, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$0 \leq f(x,y) \leq x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2. \tag{1}$$

(raisonner séparément si (x,y) est à l'origine ou non). Or le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0, ce qui permet de conclure que f prolongée en $(0,0)$ par 0 est continue.
Calculons les dérivées partielles de f en $(x,y) \neq (0,0)$. On trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ces fonctions sont clairement continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Donc f est différentiable, et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$Df(x,y)(h,k) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} h + \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^4y}{(x^2+y^2)^2} k.$$

Il reste à étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction nulle. À cause de (1), on voit que

$$f(x,y) = \underset{\|(x,y)\| \to 0}{o} (\|(x,y)\|),$$

ce qui se réécrit

$$f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + \underset{\|(x,y)\| \to 0}{o} (\|(x,y)\|).$$

Comme L est linéaire (et continue), cela signifie exactement que f est différentiable en 0, et que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$Df(0,0)(h,k) = L(h,k) = 0.$$

Montrons que f est de classe C^1. Comme on a déjà vu que f était de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, il suffit de montrer que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$.
D'abord, comme $Df(0,0)$ est la fonction nulle, les dérivées partielles de f s'annulent en $(0,0)$. Ensuite, par inégalité triangulaire, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right| \leq |x| \frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|x| \leq 2\|(x,y)\|,$$

qui tend vers 0 quand $\|(x,y)\| \to 0$. On en déduit que $\partial f / \partial x$ est continue en $(0,0)$. Le cas de $\partial f / \partial y$ se traite de la même façon, et f est donc de classe C^1.

Exercice 3. (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x-y, x^2+y)$. La fonction f est-elle inversible au voisinage de 0 ? Globalement sur $\mathbb{R}^2$?

Correction. Chacune des coordonnées de f est un polynôme en (x,y), donc f est de classe C^∞, et donc en particulier C^1. Calculons la matrice jacobienne de f en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On trouve

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est une matrice inversible (son déterminant vaut 1). On en déduit que la différentielle de f en $(0,0)$ est inversible, et donc par le théorème d'inversion locale qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$ contenant $f(0,0) = (0,0)$ telle que la restriction de f à U est un C^1-difféomorphisme de U dans V. En particulier, f est inversible au voisinage de $(0,0)$.
En revanche, f n'est pas globalement inversible, puisque $f(-1,-1) = f(0,0) = (0,0)$.

Exercice 4. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 \exp(x^2 y^2) - x^2$. Soient x_0 et y_0 des réels tels que $f(x_0, y_0) = 0$. Montrer qu'au voisinage de (x_0, y_0), l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $f(x, y) = 0$ coïncide avec le graphe d'une fonction de x si et seulement si $x_0 \neq 0$.

Correction. Soient x_0 et y_0 comme dans l'énoncé de l'exercice, c'est à dire tels que $f(x_0, y_0) = 0$, ou autrement dit tels que

$$x_0^2 = y_0^2 \exp(x_0^2 y_0^2). \tag{2}$$

Commençons par supposer que $x_0 \neq 0$, et montrons qu'au voisinage de (x_0, y_0), l'ensemble des solutions (x, y) de l'équation $f(x, y) = 0$ coïncide avec le graphe d'une fonction de x. Comme la fonction f est visiblement de classe C^1, par le théorème des fonctions implicites, il suffit de vérifier que la dérivée partielle selon y de f en (x_0, y_0) est non nulle. Mais comme $x_0 \neq 0$, par (2), $y_0 \neq 0$. Par ailleurs, un rapide calcul montre que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 2y_0 \Big(1 + x_0^2 y_0^2\Big) \exp(y_0^2),$$

qui ne s'annule que lorsque $y_0 = 0$. On en déduit que $\partial f / \partial y(x_0, y_0) \neq 0$, et donc le résultat annoncé.
Il reste à montrer que lorsque $x_0 = 0$, alors au voisinage de (x_0, y_0), l'ensemble des solutions (x, y) de $f(x, y) = 0$ ne coïncide pas avec le graphe d'une fonction de x. Pour ce faire, remarquons d'abord avec l'aide de (2) que si $x_0 = 0$, alors nécessairement $y_0 = 0$.
Maintenant, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un voisinage U de $(0, 0)$ et une fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in U$, si $f(x, y) = 0$, alors $x \in I$ est $y = \varphi(x)$. Quitte à prendre un voisinage plus petit, on peut supposer que U est de la forme $]-\delta, \delta[\times]-\delta, \delta[$, pour un certain $\delta > 0$. Soit $x \in]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$, et $g : y \in \mathbb{R} \mapsto y^2 \exp(x^2 y^2)$. On a

$$g(0) = 0 < x^2 < \delta^2 < \delta^2 \exp(x^2 \delta^2) = g(\delta).$$

Donc comme g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in]0, \delta[$ tel que $g(y) = x^2$. On a donc $(x, y) \in]-\delta, \delta[\times]-\delta, \delta[$ et $f(x, y) = g(y) - x^2 = 0$. Donc par hypothèse, $x \in I$ et $\varphi(x) = y$. Mais par ailleurs, $(x, -y)$ appartient également à $]-\delta, \delta[\times]-\delta, \delta[$, et $f(x, -y)$ vaut également 0, donc par hypothèse, on a aussi $\varphi(x) = -y$. Comme y est non nul, on arrive à une absurdité, et l'ensemble des solutions (x, y) de $f(x, y) = 0$ au voisinage de $(0, 0)$ ne coïncide pas avec le graphe d'une fonction de x.

Exercice 5. (4 pts) On considère une arche de cycloïde, définie par la courbe paramétrée

$$\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \in \mathbb{R}^2, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Calculer la longueur de γ, et sa courbure en tout point régulier.
Indication : On pourra utiliser la formule $1 - \cos(\theta) = 2\sin(\theta/2)^2$.

Correction. Commençons par calculer la dérivée de γ. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t)).$$

La première coordonnée de s'annule qu'en $t = 0$ et $t = 2\pi$. En ces points, la deuxième coordonnée s'annule également. Donc $t \in [0, 2\pi]$ donne lieu à un point régulier de γ si et seulement si $t \notin \{0, 2\pi\}$.
Calculons la norme du vecteur dérivé. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\big(1 - \cos(t)\big)^2 + \sin(t)^2} = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)^2} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right),\end{aligned}$$

où, on a utilisé l'identité $1 - \cos(t) = 2\sin(t/2)^2$, et le fait que $\sin(t/2)$ est positif pour $t \in [0, 2\pi]$.
On peut donc calculer la longueur de γ, que l'on note L. On a

$$L = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8,$$

Maintenant, calculons la dérivée second de γ :

$$\gamma''(t) = (\sin(t), \cos(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

La courbure de γ en un point régulier (c'est à dire correspondant à $t \in]0, 2\pi[$) est donc la réel $\kappa(t)$ donné par :

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|\cos(t)(1 - \cos(t)) - \sin(t)^2|}{8\sin\left(\frac{t}{2}\right)^3} \\ &= \frac{|\cos(t) - 1|}{8\sin\left(\frac{t}{2}\right)^3} = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}{8\sin\left(\frac{t}{2}\right)^3} = \frac{1}{4\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Exercice 6. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application valant 0 et différentiable à l'origine, et positive sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est sous-linéaire au voisinage de 0, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \|v\| \leq \delta \Rightarrow |f(v)| \leq \epsilon \|v\|.$$

On pourra éventuellement commencer par traiter le cas $n = 1$ et $\| \cdot \| = | \cdot |$ (la valeur absolue), en se rappelant qu'alors f est différentiable en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0.

Correction. Traitons d'abord le cas $n = 1$ et $\| \cdot \| = | \cdot |$. Comme f est dérivable en 0 et atteint son minimum en 0, on sait que $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, cela signifie

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(v)}{v} = 0.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $v \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ est tel que $|v| \leq \delta$, alors

$$\left| \frac{f(v)}{v} \right| \leq \epsilon.$$

le résultat s'obtient en multipliant par $|v|$ de chaque côté de l'inégalité.
Passons au cas général $n \geq 1$ et $\| \cdot \|$ quelconque. En premier lieu, montrons que la différentielle de f s'annule en 0. Pour ce faire, montrons que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on a $Df(0)(v) = 0$.
Soit donc $v \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) := f(tv)$. Par l'exercice 7 du TD n°1, φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0) = Df(0)(v)$. Par ailleurs, φ est positive et s'annule en 0, donc comme dans le cas $n = 1$, $\varphi'(0) = 0$. Donc comme annoncé, $Df(0)(v) = 0$.
La définition de la notion de différentiabilité nous dit donc que

$$f(v) = f(0) + Df(0)(v) + \underset{\|v\| \to 0}{o}(\|v\|) = \underset{\|v\| \to 0}{o}(\|v\|).$$

Le caractère sous-linéaire de f est une traduction directe de cette propriété en utilisant des quantificateurs.